HAI PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

I. Phương pháp đổi biến:

Phương pháp đổi biến được sử dụng khá phổ biến trong việc tính các tích phân bất định. Phương pháp đổi biến số để xác định các nguyên hàm có hai dạng dựa trên định lý sau:

Định lý:

a) Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ là hàm có đạo hàm thì:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

b) Nếu hàm $f(x)$ liên tục thì khi ta đặt $x = \varphi(t)$ trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm $\varphi'(t)$ của nó là những hàm số liên tục, ta sẽ được:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$$

Từ đó ta có hai dạng đổi biến sau:

Dạng 1. Thực hiện theo các bước:

- **Bước 1:** Chọn $x = \varphi(t)$, là hàm số thích hợp.
- **Bước 2:** Lấy vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.
- **Bước 3:** Biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt. Giả sử rằng
$$f(x)dx = g(t)dt.$$
- **Bước 4:** Khi đó $I = \int g(t)dt$.

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn biến phụ:

- *Dấu hiệu* $\sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$: chọn $x = a\sin t$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ hoặc $x = a\cos t$ với $t \in [0, \pi]$.
- *Dấu hiệu* $\sqrt{x^2 - a^2}, a > 0$: chọn $x = \frac{a}{\sin t}$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$ với $t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.
- *Dấu hiệu* $\sqrt{a^2 + x^2}, a > 0$: chọn $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ với $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hoặc $x = a\,\mathrm{cotg}\,t$ với $t \in (0, \pi)$.
- *Dấu hiệu* $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ *hoặc* $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, a > 0$: chọn $x = a\cos 2t$ với $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- *Dấu hiệu* $\sqrt{(x-a)(b-x)}$: chọn $x = a + (b-a)\sin^2 t$.

Ví dụ 1. *Tính tích phân:* $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Đặt $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tích phân thành:

$$I = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Chú ý: Do $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow \cos t > 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{(1-x^2)^3} & = \cos^3 t \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

Ví dụ 2: *Tính tích phân bất định:* $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Vì điều kiện $|x| > 1$, ta xét hai trường hợp:

- Với $x > 1$: Đặt $x = \frac{1}{\sin 2t}, 0 < t < \frac{\pi}{4}$, suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} &= -\frac{2dt}{\sin^3 2t} = -\frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)dt}{8\sin^3 t \cos^3 t} \\ &= -\frac{1}{4}(\operatorname{cotg} t.\frac{1}{\sin^2 t} + \operatorname{tg} t.\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{2}{\sin t.\cos t})dt. \end{aligned}$$

  Từ đó có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8}(\operatorname{cotg}^2 t - \operatorname{tg}^2 t) - \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} t| + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x - \sqrt{x^2-1}| + C. \end{aligned}$$

- Với $x < -1$, tương tự như trường hợp trên.

Chú ý: Ở lời giải trên, ta có kết quả $\operatorname{cotg}^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 4x\sqrt{x^2-1}$ và $\operatorname{tg} t = x - \sqrt{x^2-1}$, vì:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}^2 t - \operatorname{tg}^2 t &= \frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{\cos^2 t.\sin^2 t} = \frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t} = \frac{4\sqrt{1-\sin^2 2t}}{\sin^2 2t} \\ &= \frac{4}{\sin 2t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1} = 4x\sqrt{x^2-1}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1-\cos 2t}{\sin 2t} = \frac{1}{\sin 2t} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2t} - 1} = x - \sqrt{x^2-1}.$$

Ví dụ 3. *Tính tích phân bất định:* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Đặt $x = \operatorname{tg} t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, khi đó

$$I = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Dạng 2. Thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Chọn $t = \varphi(x)$, là hàm số thích hợp, rồi xác định $x = \psi(t)$ (nếu có thể).
- **Bước 2:** Lấy vi phân $dt = \varphi'(x)dt$.
- **Bước 3:** Biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt. Giả sử rằng

$$f(x)dx = g(t)dt.$$

- **Bước 4:** Khi đó $I = \int g(t)dt$.

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn biến phụ:

- *Dấu hiệu hàm có mẫu số*: chọn t là mẫu số.
- *Dấu hiệu* $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$: chọn $t = \sqrt{\varphi(x)}$.
- *Dấu hiệu* $f(x) = \dfrac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x + e}$: chọn $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ với $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$.
- *Dấu hiệu* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$:
  + Với $x + a > 0$, $x + b > 0$ chọn $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$.
  + Với $x + a < 0, x + b < 0$ chọn $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$.

Ví dụ 4. *Tính tích phân bất định:* $I = \displaystyle\int \frac{\cos x \sin^3 x}{1 + \sin^2 x}dx$.

Đặt $t = 1 + \sin^2 x$, khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{t})dt = \frac{1}{2}(t - \ln|t|) + C = \frac{1}{2}[1 + \sin^2 x - \ln(1 + \sin^2 x)] + C.$$

Ví dụ 5. *Tính tích phân:* $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$.

Đặt $t = \sqrt{1-x} \Longrightarrow x = 1 - t^2$, lúc đó

$$\begin{aligned} I &= -2\int (t^4 - 2t^2 + 1)dt = -\frac{2}{15}(3t^4 - 10t^2 + 15)t + C \\ &= -\frac{2}{15}(3x^2 + 4x + 8)\sqrt{1-x} + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 6. *Tính tích phân:* $I = \displaystyle\int x^5 \sqrt[3]{(1-2x^2)^2}dx$.

Đặt $t = \sqrt[3]{1 - 2x^2} \Longrightarrow x^2 = \dfrac{1-t^3}{2}$, khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{8}\int (t^7 - t^4)dt = \frac{3}{8}(\frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5}) + C \\ &= \frac{3}{320}(20x^4 - 4x^2 - 3)\sqrt[3]{(1-2x^2)^2} + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 7. *Tính tích phân* $\displaystyle\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$.

Đặt $t = \sqrt{\cos x} \Longrightarrow t^2 = \cos x$, khi đó:

$$\begin{aligned} I &= 2\int (t^6 - t^2)dt = \frac{2}{21}(3t^6 - 7t^2)t + C \\ &= \frac{2}{21}(\cos^3 x - 7\cos x)\sqrt{\cos x} + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. *Tính tích phân:* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Đặt $t = \sqrt{1+e^x} \Longleftrightarrow t^2 = 1 + e^x$, khi đó:

$$I = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

Có thể đặt $t = e^{-\frac{x}{2}}$, lúc ấy $I = -2\ln|e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{e^{-x}+1}| + C$.

Ví dụ 9. *Tính tích phân bất định:* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$.

Ta xét hai trường hợp:

$*$ Với $x > 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+1 & > 0 \\ x+2 & > 0 \end{cases}$,

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$, khi đó:

$$I = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}| + C.$$

$*$ Với $x < -2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+1 & < 0 \\ x+2 & < 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{-(x+1)} + \sqrt{-(x+2)}$, khi đó:

$$I = -2\int \frac{dt}{t} = -2\ln|\sqrt{-(x+1)} + \sqrt{-(x+2)}| + C.$$

II. Phương pháp tích phân từng phần:

Từ công thức đạo hàm của hàm tích suy ra:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Sử dụng công thức nầy ta có các bước tính tích phân $I = \displaystyle\int f(x)dx$, như sau:

- **Bước 1:** Biến đổi tích phân ban đầu về dạng:

$$I = \int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx.$$

- **Bước 2:** Đặt: $\begin{cases} u & = f_1(x) \\ dv & = f_2(x)dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du \\ v. \end{cases}$

- **Bước 3:** Khi đó: $I = uv - \displaystyle\int vdu$.

Lưu ý: Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần ta cần tuân thủ nguyên tắc sau:

- Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.

- Tích phân $\int vdu$ tính được dễ hơn so với $\int f(x)dx$.

Ví dụ 10: *Tính tích phân:* $I = \int \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Viết lại $I = \int \ln(x+\sqrt{x^2+1}).\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Đặt:

$$\begin{cases} u &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ dv &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du &= \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}dx = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ v &= \sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{x^2+1}.\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int dx = \\ &= \sqrt{x^2+1}.\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 11: *Tính tích phân bất định:* $I = \int \cos(\ln x)dx$.

Tích phân từng phần với $u = \cos(\ln x)$, sau hai bước nhận được:

$$I = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu tính cả hai tích phân:

$$\int \sin(\ln x)dx; \qquad \int \cos(\ln x)dx,$$

ta sử dụng công thức tích phân từng phần cho cả hai tích phân rồi cộng vế và trừ vế để suy ra tích phân cần tính.

Ví dụ 12: *Tính tích phân bất định:* $I = \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases}$, được: $I = \ln(\cos x).\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - x + C$.

Chú ý: Một số dạng hàm cơ bản sau đây có cách tính cho riêng từng loại.

Loại 1. Tích phân $I = \int P(x)\sin\alpha x dx$ hoặc $\int P(x).\cos\alpha x dx$.

Có hai cách:

- **Cách 1:** Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin\alpha x dx \end{cases}$, bằng cách nầy ta phải tích phân từng phần nhiều lần (số lần ít nhất bằng bậc của đa thức $P(x)$).
- **Cách 2:** *Phương pháp hằng số bất định* Thực hiện các bước sau:
  + **Bước 1.** Ta có:

$$I = \int P(x)\cos\alpha x dx = A(x)\sin\alpha x + B(x)\cos\alpha x + C. \qquad (1)$$

trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là hai đa thức cùng bậc với $P(x)$.

+ **Bước 2.** Lấy đạo hàm hai vế của (1), được:

$$P(x). \cos \alpha x = [A'(x) + B(x)] \sin \alpha x + [A(x) + B'(x)] \cos \alpha x \quad (2)$$

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta xác định được các đa thức $A(x), B(x)$.

+ **Bước 3.** Kết luận.

Nhận xét. *Nếu bậc của đa thức $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng 3 thì cách 1 cồng kềnh hơn cách 2. Do đó ta đi tới nhận định sau:*

- ⋆ Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn hoặc bằng 2, ta lựa chọn cách 1
- ⋆ Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn 2, ta chọn cách 2.

Ví dụ 13: *Tính tích phân:* $\int x \sin^2 x dx$

Biến đổi tích phân $I = \int x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx.$

Tích phân từng phần vào tích phân $\int x \cos 2x dx$, được kết quả:

$$I = \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

Ví dụ 14: *Tính:* $I = \int (x^3 - x^2 + 2x - 3) \sin x dx.$

Ta có: $I = \int (x^3 - x^2 + 2x - 3) \sin x dx = P_3(x) \cos x + Q_3(x) \sin x$

Với $P_3(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1,\ Q_3(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2.$

Lấy đạo hàm hai vế rồi đồng nhất được hệ:

$$\begin{cases} a_2 & = 0 \\ 3a_1 = b_2 & = 0 \\ 2b_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 + d_2 & = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} -a_2 & = 1 \\ 3a_2 - b_1 & = -1 \\ 2b_2 - c_2 & = 2 \\ -c_2 + d_1 & = -3. \end{cases}$$

Giải hai hệ đó được $a_1 = -1; b_1 = 1, c_1 = 4, d_1 = 1, a_2 = 0, b_2 = 3, c_2 = -2, d_2 = -4.$

Vậy $I = (-x^3 + x^2 + 4x + 1) \cos x + (3x^2 - 2x - 4) \sin x + C.$

∗ **Loại 2.** Tích phân $I = \int e^{ax} \sin bx dx$ hoặc $\int e^{ax}. \cos bx dx.$

Ta cũng có thể chọn một trong hai cách tương tự như loại 1 trên.

- **Cách 1.** Ta đặt $\begin{cases} u = \cos bx \\ dv = e^{ax} dx. \end{cases}$
- **Cách 2.** $I = \int e^{ax} \cos bx dx = [A \cos bx + B \sin bx] e^{ax} + C$ với A, B hằng số.

Chú ý:

a) Nếu bài toán yêu cầu tính giá trị của một cặp tích phân trên ta có thể tích phân từng phần vào cả hai tích phân rồi cộng vế và trừ vế để được kết quả cả hai tích phân.

b) Phương pháp trên cũng áp dụng được cho tích phân:

$$J_1 = \int e^{ax}\sin^2 bx dx, \qquad J_2 = \int e^{ax}\cos^2 bx dx.$$

$*$ **Loại 3.** Tích phân $I = \int P(x).e^{ax}dx$ hoặc $\int P(x).\cos\alpha x dx$.

Cũng chọn một trong hai cách như hai loại trên

- **Cách 1.** Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax}dx. \end{cases}$

- **Cách 2.** $I = \int P(x).e^{ax}dx = A(x)e^{ax} + C$ trong đó $A(x)$ là đa thức cùng bậc với $P(x)$.

Nhận xét *Nếu bậc của đa thức $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng 3 thì cách 1 cồng kềnh hơn cách 2. Do đó ta đi tới nhận định sau:*

$\star$ Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn hoặc bằng 2, ta lựa chọn cách 1.

$\star$ Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn 2, ta chọn cách 2.

$*$ **Loại 4.** Tích phân $I = \int x^\alpha \ln x dx$, với $\alpha \neq -1$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^\alpha dx \end{cases}$

Ví dụ 15: *Tính tích phân* $I = \int e^x.\cos^2 x dx$.

Hạ bậc $\cos^2 x$ rồi đưa về tích phân loại 2, nếu sử dụng phương pháp đồng nhất ta viết:

$$I = \frac{1}{2}\int e^x.(1+\cos 2x)dx = (a + b\cos 2x + c\sin 2x)e^x + C.$$

Lấy đạo hàm hai vế rồi đồng nhất ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a & = 1 \\ 2(2c+b) & = 1 \\ 2(c-2b) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{10} \\ c = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Vậy $I = \frac{1}{10}(5 + \cos 2x + 2\sin 2x)e^x + C$.

Ví dụ 16: *Tính tích phân* $I = \int xe^{3x}dx$.

Tích phân từng phần được: $I = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$.

Ví dụ 17: *Tính tích phân* $I = \int (2x^3 + 5x^2 - 2x + 4)e^{2x}dx$.

Dùng phương pháp đồng nhất được $I = (x^3 + x^2 - 2x + 3)e^{2x} + C$.

Ví dụ 18: *Tính tích phân* $I = \int x^2 \ln 2x dx$.

Tích phân từng phần được $I = \frac{x^3}{3}\ln 2x - \frac{x^3}{9} + C$.

III. Dùng hàm phụ: ý tưởng của phương pháp dùng hàm phụ là tìm một hàm $g(x)$ sao cho nguyên hàm của các hàm số $f(x) \pm g(x)$ dễ xác định hơn so với $f(x)$, từ đó suy ra nguyên hàm của $f(x)$, cụ thể ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm kiếm hàm số $g(x)$.
- **Bước 2:** Xác định nguyên hàm của hàm số $f(x) \pm g(x)$, tức là:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = A(x) + C_1 \\ F(x) - G(x) = B(x) + C_2. \end{cases} \tag{1}$$

- **Bước 3:** Cộng vế (1) nhận được nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = \frac{1}{2}[A(x) + B(x)] + C$.

Ví dụ 19: *Tính* $I = \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}dx$; $J = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$.

Hàm phụ cho I là $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$ và J là $g(x) = \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Ví dụ 20: *Tính tích phân:* $\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}dx$.

Dùng hàm số phụ $g(x) = \frac{e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân

$$I = \int x^3(2 - 3x^2)^8 dx \qquad J = \int \sin^3 x.\sqrt{\cos x}dx$$
$$K = \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^8 x} \qquad K = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$$
$$M = \int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} \qquad N = \int \frac{2x dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

2. Tính các tích phân

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \qquad J = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$
$$K = \int \frac{(6x^3 + 8x + 1)dx}{(3x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 1}} \qquad L = \int \frac{dx}{2x\sqrt{2x + 1}}$$
$$M = \int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{\sin^2 x + 1}} \qquad N = \int x^3 \ln x dx$$
$$K = \int x \sin\sqrt{x} dx \qquad L = \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}.$$

3. Tính các tích phân

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \qquad J = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. Định nghĩa và các tính chất:

1. Định nghĩa: $\int\limits_a^b f(x)\ dx = F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Chú ý: Tích phân $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ chỉ phụ thuộc f, a, b không phụ thuộc cách ký hiệu biến lấy tích phân:

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^b f(x)\ dt = \cdots = F(b) - F(a).$$

2. Các tính chất:

i) $\int\limits_a^b f(x)dx = 0.$

ii) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)\ dx.$

iii) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$

iv) $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x) \pm \int\limits_a^b g(x)\ dx.$

v) $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_b^c f(x)\ dx.$

vi) $f(x) \geq 0 \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\ dx \geq 0 \quad (a \leq b).$

vii) $f(x) \geq g(x) \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\ dx \geq \int\limits_a^b g(x)\ dx,\ a \leq b.$

viii) Nếu $m \leq g(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a).$$

Ví dụ 1. *Tính* $I = \int\limits_{-2}^{2} |x^2 - 1|\ dx;\quad J = \int\limits_{-1}^{1} |e^x - 1|\ dx.$

Do $-1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Longrightarrow |x^2 - 1| = 1 - x^2$ và

$\begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Longrightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1$ nên

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\ dx + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\ dx = 4.$$

Ngoài ra:

$$-1 \leq x \leq 0 \Longrightarrow e^x \leq 1 \Longrightarrow e^x - 1 \leq 0 \Longrightarrow |e^x - 1| = 1 - e^x.$$
$$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow e^x \geq 1 \Longrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Longrightarrow |e^x - 1| = e^x - 1$$

nên $J = \int_{-1}^{o} (1 - e^x)\ dx + \int_{o}^{1} (e^x - 1)\ dx = e + \frac{1}{e} - 2.$

Ví dụ 2. *Tính*

$$I = \int_{0}^{2} \max\ \{f(x), g(x)\} dx$$

với $f(x) = x^2; g(x) = 3x - 2.$

Chú ý: $f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 2.$

- $0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0 \Longrightarrow f(x) \geq g(x)$
  $\Longrightarrow \max\ \{f(x), g(x)\} = x^2.$
- $1 \leq x \leq 2 \Longrightarrow x^2 - 2x + 2 \leq 0 \Longrightarrow f(x) \leq g(x).$
  $\Longrightarrow \max\ \{f(x), g(x)\} = 3x - 2.$

Như vậy: $I = \int_{o}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} (3x - 2) dx = \frac{17}{6}.$

Chú ý: Nếu biết tận dụng ý nghĩa hình học của tích phân, trong nhiều trường hợp ta có ngay được đáp số của một tích phân tương đối phức tạp.

Ví dụ 3. *Tính* $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx;\ a > 0.$

Hàm số $y = \sqrt{a^2 - x^2} \Longrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ là hàm liên tục không âm có đồ thị là $\frac{1}{2}$ đường tròn nên theo ý nghĩa hình học của tích phân thì I là diện tích của nửa đường tròn này: $I = \pi a^2.$

BÀI TẬP

1. *Tính các tích phân:*

$$I = \int_{-3}^{3} |x - 2|\ dx; \qquad J = \int_{-1}^{4} |x^2 - 3x + 2|\ dx;$$
$$K = \int_{o}^{2} \max\ \{x^2, 2 - x\} dx.$$

2. *Tìm* a, b *để hàm* $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \le 1 \\ |x-1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$

liên tục trên R. *Từ đó tính* $\int\limits_{-2}^{3} f(x)dx.$

II. Hai phương pháp cơ bản.

1. Đổi biến số: Gồm 2 dạng; dạng 1 và dạng 2 như tích phân bất định, chỉ cần thêm cận vào thích hợp: $I = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Dạng 1:

i) Chọn $x = \varphi(t)$.

ii) Tính $dx = \varphi'(t)dt$.

iii) Tính các cận α, β tương ứng với a, b.

iv) Biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt : $f(x)dx = g(t)dt$.

v) Kết luận $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)dt.$

Các dấu hiệu lựa chọn $x = \varphi(t)$ như phần tích phân bất định đã biết trước đây.

Ví dụ 1. *Tính* $I = \int\limits_{o}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Đổi biến $x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Longrightarrow t = 0; x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}.$

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^2 tdt.$$

$$I = \int\limits_{o}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \frac{1}{2}\int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 2. *Tính* $I = \int\limits_{1}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

Đổi biến $x = \dfrac{1}{\sin t} \Longrightarrow dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt$

Đổi cận $x = 1 \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2};\ x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{3}.$

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\dfrac{1}{\sin t}\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1}} = dt.$$

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{6}.$$

Chú ý: Có thể biến đổi $I = \displaystyle\int_{2}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ rồi đổi biến $t = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow dt = -\dfrac{dx}{x^2} \Longrightarrow I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ rồi lại đổi biến $t = \sin u$ để được $I = \dfrac{\pi}{6}$.

Ví dụ 3. *Tính* $I = \displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9+3x^2}}{x^2}dx.$

Đổi biến: $x\sqrt{3} = 3\mathrm{tg}t \Longleftrightarrow x = \sqrt{3}\mathrm{tg}t \Longrightarrow dx = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt.$

$x = 1 \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{6};\ x = \sqrt{3} \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}.$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}\cos t}{(1-\sin^2 t)\sin^2 t}dt$$

lại đổi biến $u = \sin t$ (đổi biến ngược)

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{3}du}{u^2(1-u^2)} = \sqrt{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2-1}\Big)du$$

$$= \sqrt{3}\Big(-\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{u-1}{u+1}\Big|\Big)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3}\Big(2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{3(2-\sqrt{2})}\Big).$$

BÀI TẬP.

Tính các tích phân:

$I = \displaystyle\int_{1}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx$ *đổi biến* $x = 2\sin t$; *đáp số* $I = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\Big)$

$J = \displaystyle\int_{-a}^{o} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}},\ a > 0$ *đổi biến* $x = a\cos 2t$; *đáp số* $J = a\Big(1 - \dfrac{\pi}{4}\Big)$

$K = \displaystyle\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{(x-a)(x-b)}dx;\ 0 < a < b.$

đổi biến $x = a + (b-a)\sin^2 t$; *đáp số* $\dfrac{(b-a)^2}{8}\Big(\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\Big)$

$L = \displaystyle\int_{o}^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx;\ t = \sqrt{1+x^2};$ *đáp số* $\dfrac{848}{105}$

$M = \displaystyle\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx;\ t = \cos x;$ *đáp số:* $\dfrac{1}{2}(1-\ln 2).$

Dạng 2:

i) Chọn $t = \varphi(x)$

ii) Tính dt suy ra dx.

iii) Tính cận α, β ứng với a, b

iv) Biểu thị $f(x)dx$ theo t, dt. Giả sử $f(x)dx = g(t)dt$.

v) Kết luận $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$

Các dấu hiệu đổi biến dạng này tương tự phần tích phân bất định

Ví dụ 4. *Tính* $I = \int\limits_{o}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$.

Đặt $t = 2\sin^2 x + \cos^2 x \Longrightarrow dt = \sin 2x dx$

$x = 0 \Longrightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow t = \frac{5}{4}$.

$$\frac{\sin 2x dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{dt}{t}.$$

khi đó $I = \int\limits_{1}^{\frac{5}{4}} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big]_1^{\frac{5}{4}} = \ln\frac{5}{4}$.

Ví dụ 5. *Tính* $I = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; $\quad J = \int\limits_{o}^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

* Tính I:

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow t^2 = x^2 + 1 \Longrightarrow 2tdt = 2xdx \Longrightarrow dx = \frac{tdt}{x}$.

Đổi cận $x = \sqrt{3} \Longrightarrow t = 2;\ x = \sqrt{8} \Longrightarrow t = 3$.

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{tdt}{x^2 t} = \frac{dt}{t^2-1}.$$

$I = \int\limits_{2}^{3} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

* Tính J:

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Longrightarrow t^3 = x^2 + 1$, khi đó: $3t^2 dt = 2xdx \Longrightarrow dx = \frac{3t^2 dt}{2x}$.

Đổi cận: $x = 0 \Longrightarrow t = 1;\ x = \sqrt{7} \Longrightarrow t = 2$.

Khi đó: $\frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{x^3.3t^2 dt}{2xt} = 3t(t^3-1)dt$.

$$I = 3\int\limits_{1}^{2}(t^4 - t)dt = 3\Big(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\Big)\Big]_1^2 = \frac{141}{10}.$$

BÀI TẬP

a) Tính $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}$

đổi biến $t = \sin x$. *đáp số:* $I = \ln \frac{3(6-\sqrt{3})}{5(4-\sqrt{3})}$.

b) Tính $I = \int\limits_{o}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x dx}{\cos x + 2}$

đổi biến $t = \cos x$. đáp số: $I = \frac{5}{2} + 3\ln\frac{5}{6}$

c) Tính $I = \int\limits_{1}^{2} \frac{1+\ln^2 x}{x} dx$.

đổi biến $t = \ln x$, đáp số: $I = \frac{4}{3}$.

d) Tính $I = \int\limits_{o}^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 2}}$

đổi biến $t = \sqrt{e^x + 2}$. đáp số: $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left[(6-4\sqrt{2})(5+2\sqrt{6})\right]$.

2. Phương pháp tích phân từng phần:

Nhắc lại:

- B_1 : Biến đổi tích phân ban đầu về dạng

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f_1(x).f_2(x)dx$$

- B_2 : Đặt $\begin{cases} u &= f_1(x) \\ dv &= f_2(x)dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}$.

- B_3 : Khi đó $I = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$

Chú ý: Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân cần tuân thủ các qui tắc sau:

1) Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.

2) Tích phân $\int\limits_a^b vdu$ được xác định một cách dễ dàng so với I.

3) Nhớ 4 dạng cơ bản:

(i) $I = \int P(x)\sin\alpha x$ (hoặc $\int P(x)\cos\alpha x dx$) đặt $u = P(x)$.

(ii) $I = \int e^{ax} \cos^{bxdx}$ (hoặc $\int e^{ax} \sin bxdx); a, b \neq 0.$

Đặt $u = \cos bx$ hay $u = \sin bx$.

(iii) $I = \int P(x)e^{\alpha x}dx$ (hoặc $\int P(x)e^{\alpha x}dx$) đặt $u = P(x)$.

(iv) $I = \int x^{\alpha} \ln x dx;\ \alpha \neq -1;$ đặt $u = \ln x$.

Ví dụ 1. *Tính* $I = \int\limits_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx.$

$$\ln(1+x) \longrightarrow \frac{dx}{1+x}$$

$$\frac{dx}{x^2} \longrightarrow -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{x}\ln(x+1)\Big]_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} \\ &= -\frac{1}{3}\ln 3 + \ln 2 + \int\limits_1^2 \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\Big)dx \\ &= -\frac{3}{2}\ln 3 + 3\ln 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. *Tính* $I = \int\limits_1^e (x\ln x)^2 dx.$

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big]_1^2 - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2 \ln x dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\Big(\frac{x^3}{3}\ln x\Big]_1^2 - \frac{1}{3}\int\limits_1^e x^2 dx\Big) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\Big(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}\Big) = \frac{7e^3}{27} - \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. *Tính* $I = \int\limits_o^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln(1+\cos x)dx$

$$\begin{aligned} I &= \sin x.\ln(1+\cos x)\Big]_o^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx \\ &= \int\limits_o^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)dx = (x - \sin x)\Big]_o^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. *Tính* $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx.$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\ln x}{x+1}\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x(x+1)} \\ &= \frac{e-1}{e+1} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx \\ &= \frac{e-1}{e+1} + (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{2e}{e+1}. \end{aligned}$$

III. Một số tích phân đặc biệt.

1. $f(x)$ liên tục và là hàm lẻ trên $[-a, a]$ thì $I = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$

Ví dụ 1. *Tính* $I = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x. \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx.$

Hàm $f(x) = \cos x. \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ liên tục trên $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ và

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \cos x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \cos(-x). \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \left[\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] \cos x = \ln 1. \cos x = 0 \\ &\Longrightarrow f(-x) = -f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm lẻ, do đó $I = 0$.

Chú ý: Khi gặp dạng tích phân này thường ta nghĩ ngay tới phương pháp tích phân từng phần, tuy nhiên đó chưa phải là giải pháp tốt. Điều này cho thấy việc nhìn nhận tính chất cận và đặc tính của hàm số dưới dấu tích phân để từ đó lựa chọn phương pháp giải là rất quan trọng.

Tuy nhiên khi làm bài thi nên trình bày như sau:

$$I = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{o} \cos x. \left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \cos(-x). \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx.$$

Đổi biến vào tích phân thứ nhất: $x = -t \Longrightarrow dx = -dt$

$x = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow t = \dfrac{1}{2};\ x = 0 \Longrightarrow t = 0.$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{o} \cos(-t).\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\,dt + \int\limits_{o}^{\frac{1}{2}} cosx.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\,dx \\ &= -\int\limits_{o}^{\frac{1}{2}} \cos t.\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\,dt + \int\limits_{o}^{\frac{1}{2}} cosx.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\,dx = 0. \end{aligned}$$

2) Một số dạng tích phân sâu đây tương tự như 1)

(i) Nếu $f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $[-a, a]$ thì

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{o}^{a} f(x)\,dx.$$

(ii) Nếu $f(x)$ liên tục và chẵn thì:

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)\,dx}{a^x+1} = \int\limits_{o}^{\alpha} f(x)\,dx.$$

(iii) Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ thì:

$$\int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

(iv) Nếu $f(x)$ liên tục và $f(a+b-x) = f(x)$ thì

$$\int\limits_{a}^{b} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

(v) Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} f(\sin x)\,dx.$$

Ví dụ 2. *Tính* $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4dx}{2^x+1}.$

Ta có

$$I = \int\limits_{-1}^{o} \frac{x^4dx}{2^x+1} + \int\limits_{o}^{1} \frac{x^4dx}{2^x+1}.$$

Đổi biến $x = -t$ vào tích phân thứ nhất,

$$\int_{-1}^{o} \frac{x^4dx}{2^x+1} = -\int_{1}^{o} \frac{(-t)^4dt}{2^{-t}+1} = \int_{o}^{1} \frac{t^4 2^t}{2^t+1}dt = \int_{o}^{1} \frac{x^4 2^x dx}{2^x+1}.$$

Thay vào I:

$$I = \int_{o}^{1} \frac{x^4 2^x}{2^x+1}dx + \int_{o}^{1} \frac{x^4dx}{2^x+1} = \int_{o}^{1} \frac{x^4(2^x+1)}{2^x+1}dx = \int_{o}^{1} x^4dx = \frac{1}{5}.$$

Ví dụ 3. *Tính* $I = \displaystyle\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx.$

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x \Longrightarrow dx = -dt;\ x = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2};\ \ x = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 0.$

$$\begin{aligned} I &= \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(\frac{\pi}{2}-t)(-dt)}{\cos^n(\frac{\pi}{2}-t) + \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)} \\ &= \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n tdt}{\cos^n t + \sin^n t} = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx. \end{aligned}$$

do đó: $2I = \displaystyle\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}dx = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow I = \frac{\pi}{4}.$

Ví dụ 4. *Tính* $I = \displaystyle\int_{o}^{\pi} \frac{x\sin xdx}{4-\cos^2 x}.$

$\left(I = \displaystyle\int_{o}^{\pi} \frac{x\sin xdx}{4-(1-\sin^2 x)} = \int_{o}^{\pi} \frac{x\sin xdx}{3+\sin^2 x}\right.$: có dạng: $\left.\displaystyle\int_{o}^{\pi} xf(\sin x)\ dx\right).$

Đặt $x = \pi - t \Longrightarrow dx = -dt;\ x = \pi \Longrightarrow t = 0;\ x = 0 \Longrightarrow t = \pi.$

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\pi}^{o} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)\ dt}{4-\cos^2(\pi-t)} = \int_{o}^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin tdt}{4-\cos^2 t} \\ &= \int_{o}^{\pi} \frac{\pi\sin tdt}{4-\cos^2 t} - \int_{o}^{\pi} \frac{t\sin tdt}{4-\cos^2 t} = -\pi\int_{o}^{\pi} \frac{d(\cos t)}{4-\cos^2 t} - I \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 2I = -\pi\int_{o}^{\pi} \frac{d(\cos t)}{4-\cos^2 t} = \pi\int_{o}^{\pi} \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t - 4}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_{o}^{\pi} \frac{d(\cos tr)}{\cos^2 t - 4} = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-2}{\cos t+2}\right|\Big]_{o}^{\pi} = \frac{\pi\ln 9}{8}.$$

Ví dụ 5. *Tính tích phân* $I = \int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx.$

Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x \Longrightarrow dx = -dt.$

Đổi cận: $x = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2};\ x = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 0.$ khi đó

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{o} \ln\left(\frac{1+\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}\right)(-dt) = \int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\right) dt$$

$$= -\int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin t}{1+\cos t}\right) dt = -I.$$

Suy ra $2I = 0$. Vậy $I = 0$.

Ví dụ 6. *Tính* $I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x^4+\sin x}{x^2+1} dx.$

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4 dx}{x^2+1} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1} dx.$$

Ta có:

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4 dx}{x^2+1} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4-1+1}{x^2+1} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)\ dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{4}{3} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Đổi biến vào tích phân thứ hai: $x = \text{tg}t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right).$

$dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} = (1 + tg^2 t)\ dt;\ \dfrac{dx}{x^2+1} = dt$
$x = -1 \Longrightarrow t = -\dfrac{\pi}{4};\ \ x = 1 \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}.$

Như vậy: $I_1 = -\dfrac{4}{3} + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{3}.$

$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\sin x}{x^2+1} dx = \int\limits_{-1}^{o} \dfrac{\sin x}{x^2+1} dx + \int\limits_{o}^{1} \dfrac{\sin x}{x^2+1} dx.$

đổi biến $x = -t$ vào tích phân thứ nhất ta được

$$I_2 = \int\limits_{1}^{o} \frac{\sin(-t)}{(-t)^2+1}(-dt) + \int\limits_{o}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$$

$$= -\int\limits_{o}^{1} \frac{\sin t dt}{t^2+1} + \int\limits_{o}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1} dx = 0.$$

Vậy: $I = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

BÀI TẬP

Tính các tích phân

1) $I = \int\limits_o^{2x} x\cos^3 x dx$

Đổi biến $x = 2\pi - t$; $I = 2\pi \int\limits_o^{2\pi} \cos^3 t dt - I \Longrightarrow 2I = 0 \Longrightarrow I = 0$.

2) $I = \int\limits_o^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \text{tg} x dx$.

đổi biến $t = \frac{\pi}{4} - x$. *Đáp số:* $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

3) $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx$

$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx + \int\limits_o^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx$; đổi biến $x = -t$ vào tích phân thứ nhất:

$I = \int\limits_o^{1} \frac{2^x\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx + \int\limits_o^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx = \int\limits_o^{1} \sqrt{1-x^2} dx$

lại đổi biến $x = \sin u$; Đáp số: $I = \frac{\pi}{4}$.

Tính các tích phân sau:

1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx$; $\quad \int\limits_o^{\pi} x\sin^2 x\, dx$;

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx$; $\quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2.|\sin x|}{1 + 2^x} dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{1} \left(e^{x^2}\sin x + e^2.x^2\right) dx$; $\quad \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\, dx$.

4) $\int\limits_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$; $\quad \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

5) $\int\limits_o^{\pi} \frac{x\sin x dx}{3 + \cos^2 x}$; $\quad \int\limits_o^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1 + \cos^2 x}$.

TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

1. Phương pháp phân tích

Công thức

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{x^2 \pm a} &= \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a| + C\\
\int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\\
\int \frac{dx}{(x+a)^\alpha} &= \frac{1}{(1-\alpha)(x+a)^{\alpha+1}} + C\\
\int \frac{dx}{(ax+b)^\alpha} &= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(1-\alpha)(ax+b)^{\alpha+1}} + C.
\end{aligned}$$

Như vậy gặp

$$f(x) = \frac{x^2}{(ax+b)^\alpha}$$

ta viết

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{1}{a^2}\cdot a^2x^2 = \frac{1}{a^2}\big[(ax+b)-b\big]^2\\
&= \frac{1}{a^2}\big[(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2\big].
\end{aligned}$$

Do đó

$$f(x) = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{(ax+b)^{\alpha-2}} - \frac{2b}{(ax+b)^{\alpha-1}} + \frac{b^2}{(ax+b)^\alpha}\right].$$

Ví dụ 1._Tính_ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(1-x)^{2005}}dx.$

Mở rộng

$$\frac{x^3}{(x+b)^\alpha} = \frac{[(x+b)-b]^3}{(x+b)^\alpha} = \frac{(x+b)^3 - 3b(x+b)^2 + 3b^2(x+b) - b^3}{(x+b)^\alpha}.$$

Ví dụ 2. _Tính_ $I = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{(x-1)^{10}}.$

b) $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ với $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}.$

Xét ba trường hợp

(i) $b^2 - 4ac < 0:\quad ax^2+bx+c = a\big(x + \dfrac{b}{2a}\big)^2 + \dfrac{4ac-b^2}{4a}.$

f(x) có dạng $\dfrac{1}{u^2+\alpha^2}$ nên đổi biến $u = \alpha\,\mathrm{tg}\,t.$

(ii) $b^2 - 4ac = 0:\quad ax^2+bx+c = a\big(x + \dfrac{b}{2a}\big)^2.$

$f(x)$ có dạng $\dfrac{1}{a\big(x+\dfrac{b}{2a}\big)^2}$ là trường hợp a).

(iii) $b^2 - 4ac > 0: \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$f(x) = \dfrac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$. Phân tích thành tổng

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{1}{x-x_2} - \frac{1}{x-x_1}\right).$$

Ví dụ. *Tính* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$.

c) $f(x) = \dfrac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}$.

Viết

$$\lambda x + \mu = \frac{\lambda}{2a}(2ax + b) + \mu - \frac{\lambda b}{a2}.$$

$$f(x) = \frac{\lambda}{2a} \cdot \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \left(\mu - \frac{\lambda b}{2a}\right) \cdot \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

Ví dụ. *Tính* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3}dx$.

d) $f(x) = \dfrac{P(x)}{ax^2 + b^x + c}$: Chia đa thức tử cho mẫu để được

$$f(x) = Q(x) + \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}.$$

Ví dụ. *Tính* $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{2x^3 - 10x^2 + 16x - 1}{x^2 - 5x + 6}dx$.

e) $f(x) = \dfrac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x-\alpha)(ax^2 + bx + c)}$. Ta xét các trường hợp

(i) $b^2 - 4ac > 0$: lúc đó $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ nên

$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{(x-\alpha)a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2}$$

với A, B, C là các hằng số, xác định được nhờ phép đồng nhất.

(ii) $b^2 - 4ac = 0: \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ nên

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-x_0} + \frac{C}{(x-x_0)^2}$$

với A, B, C là các hằng số xác định được nhờ phép đồng nhất.

Ví dụ. *Tính* $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)(x^2+4x+4)}$.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$:

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}$$

với A, λ, μ là các hằng số được xác định nhờ phép đồng nhất.

Tổng quát: $f(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$.

Chia tử cho mẫu rồi đưa về trường hợp trên.

Ví dụ. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x-2}{x^3+1}dx.$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x+a)^2(x+b)^2}$.

Chú ý. Vì $\left[\dfrac{(x+a)-(x+b)}{a-b}\right]^2 = 1$ nên

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)}\right)^2 = \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x-a}\right]^2 \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+b)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)}\right] \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x+b)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} - \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)\cdot\frac{1}{b-a}\right]. \end{aligned}$$

Ví dụ 1. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2(x+1)^2}.$

Ví dụ 2. *Tính* $I = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{7x-4}{x^3-3x+2}dx.$

Chú ý. $\dfrac{7x-4}{x^3-3x+2} = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{x+2}$.

Phương pháp đổi biến

Ví dụ 1. *Tính* $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$

Ta có $\dfrac{1+x^2}{1+x^4} = \dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{(x-\dfrac{1}{x})^2+2}$. Đổi biến $t = x - \dfrac{1}{x}$.

Ví dụ 2. *Tính* $J = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$

Ta có $\dfrac{x^2-1}{x^4+1} = \dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{(x+\dfrac{1}{x})^2-2}$. Đổi biến $t = x + \dfrac{1}{x}$.

Chú ý. Cả hai tích phân này đều không đổi biến được nếu khoảng lấy tích phân chứa điểm 0. Lúc ấy dùng công thức

$$F(x) = \ln\frac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

là nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{2\sqrt{2}(x^2-1)}{x^4+1}$. Còn

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right).$$

Ví dụ 3. *Tính* $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}dx.$

Ta có

$$\frac{1+x^4}{1+x^6} = \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(1+x^2)(x^4-x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^6+1}.$$

+ Đổi biến $x = \operatorname{tg} t$ vào tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx.$

+ Đổi biến $x^3 = \operatorname{tg} t$ vào tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}dx.$

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-2} \qquad \int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+3x+10}{x^2+2x+9}dx \qquad \int_0^1 \frac{x}{(1+3x)^3}dx.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+4x^2+3} \qquad \int_0^1 \frac{x}{(1+2x)^3}dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+10x+1}{x^2+2x+9}dx \qquad \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$$

$$\int_0^1 \frac{3}{1+x^3}dx \qquad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x^2+2}{x^2+1}dx.$$

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

1. Sử dụng các nguyên hàm cơ bản

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \sqrt{x^2 \pm a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a} + \frac{a}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

Ví dụ 1.

$$I=\int_2^3\frac{dx}{x^2-x-1}=\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}$$

$$=\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x-1}\right|\Big]_2^3=\ln\left(\frac{5}{2}+\sqrt{5}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}+1\right)$$

$$=\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}.$$

Ví dụ 2.

$$I=\int_2^e\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+1}}=\int_2^e\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx=\int_2^e\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$$

$$=\ln\left|\left(x-\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right|\Big]_2^e$$

$$=\ln\left[\left(e-\frac{1}{e}\right)+\sqrt{e^2+\frac{1}{e^2}}\right]-\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{11}{4}}\right).$$

Ví dụ 3.

$$I=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

Đổi biến $t=\sqrt{1+x^2}\Longrightarrow t^2=1+x^2\Longrightarrow tdt=xdx.$

Đổi cận $x=0\Longrightarrow t=1,\ x=1\Longrightarrow t=\sqrt{2}.$

$$I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{tdt}{t\sqrt{1+t}}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=2\sqrt{1+t}\Big]_1^2=2\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right).$$

Bài tập làm thêm

Tính các tích phân sau

$$I=\int_0^{2\sqrt{2}}x\sqrt{x^2+1}dx \qquad\qquad J=\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

2. Dùng lượng liên hiệp để trục căn ở mẫu

Ví dụ 4. *Tính* $I=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$

$$I=\int_0^1\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)\Big]_0^1=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1).$$

Ví dụ 5. *Tính* $I=\displaystyle\int_2^6\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}dx.$

$$I=\int_2^6\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}dx=\int_2^6\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}-2\int_2^6\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\left(\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|\right)\Big]_2^6=4\sqrt{2}-2\ln(3+2\sqrt{2}).$$

Bài tập làm thêm

Tính các tích phân sau

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x+2}} \qquad\qquad I = \int_{2}^{5} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$$

3. Phương pháp đổi biến

Các dấu hiệu đổi biến như tích phân bất định

Ví dụ 6. *Tính* $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

C1. Đặt $x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos tdt,\ x \in [0, \frac{1}{2}] \Longrightarrow t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^3 t \cdot \cos tdt}{\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 tdt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3\sin t - \sin 3t) = \Big(-\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{12}\cos 3t\Big)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{3}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

C2. Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow t^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow tdt = -xdx$.

$$I = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(1-t^2)(-tdt)}{t} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (t^2-1)dt = (\frac{1}{3}t^3 - t)\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1.$$

Ở đây chỉ giới thiệu C1 và C2, còn kiểm tra công thức rồi dùng cách 3.

Ví dụ 7. *Tính* $I = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}dx$.

C1. Đổi biến $x = \mathrm{tg}\, t$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^3 t} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos tdt}{\cos^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos tdt}{(1-\sin^2 t)^2}.$$

Tiếp tục đổi biến $u = \sin t$, ta được

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{2u}{u^1 - 1}\right)\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

C2. Đổi biến $t = x + \sqrt{1+x^2},\ x \in [0, \sqrt{3}] \Longrightarrow t \in [1, \sqrt{3}+2]$.

$$\begin{aligned} &t - x = \sqrt{1+x^2} \Longrightarrow t - x^2 = 1 + x^2 \Longrightarrow x = \frac{t^2-1}{2t} \\ &\Longrightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{t^2+1}{2t}. \end{aligned}$$

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{2t^2}{t^2+1} dx$$
$$\Longrightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt.$$

$$\sqrt{1+x^2} dx = \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \frac{1}{4}\left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt.$$

$$I = \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{3}+2} (t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}) dt = \frac{1}{4}(\frac{t^2}{2} + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2})\Big]_1^{\sqrt{3}+2}.$$

C3. Tích phân từng phần, ta được

$$I = \left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}|\right)\Big]_0^{\sqrt{3}}.$$

Chú ý. Chủ yếu là cách 2: đặt $t = x + \sqrt{1+x^2}$ có thể dùng cho $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ví dụ 8. *Tính* $\quad I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)^5}} dx.$

Viết lại $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x^2)}$.

Đổi biến $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Longrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Longrightarrow dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}$.

$$I = \int_1^0 t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2} = -\int_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\Big]_1^0 = \frac{1}{3}.$$

Chú ý. Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có chứa $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ thì đổi biến $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Ngoài ra ở ví dụ 8 có chứa $\sqrt{1-x^2}$ và $\sqrt{1+x^2}$ nên có thể đổi biến $x = \cos 2t$.

Ví dụ 9. *Tính* $\quad I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}.$

Đổi biến $t = \sqrt[3]{3x+1} \Longrightarrow t^3 = 3x+1 \Longrightarrow 3t^2 dt = 3dx.$

$$I = \frac{1}{3}\int_1^2 (t^4 + 2t) dt = \frac{46}{15}.$$

Ví dụ 10. *Tính* $\quad I = \int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1} dx.$

Có thể đổi biến $t = x^3$ hay $t = x^3 + 1$. Đáp số $\ I = \frac{52}{9}$.

Ví dụ 11. *Tính* $\ I = \int_4^{16} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}.$

Đổi biến $t = \sqrt[12]{x} \Longleftrightarrow t^{12} = x \Longrightarrow 12t^{11}dt = dx.$

$$I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{12 \cdot t^{17}dt}{t^8 - t^3} = 12\int_1^{\sqrt[3]{2}} \big(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1}\big)dt$$
$$= 12\big(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln|t^5 + 1|\big)\Big]_1^{\sqrt[3]{2}}.$$

Chú ý. Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có chứa $\sqrt[n]{x},\ \sqrt[m]{x}, \ldots, \sqrt[r]{x}$ thì đổi biến $t = \sqrt[l]{x}$ với l là bội số chung nhỏ nhất của $n, m, \ldots, r$.

Ví dụ 12. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+8)}}$.

Đổi biến $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} \Longrightarrow dt = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+8}}\right) dx$

Suy ra $\dfrac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+8)}} = \dfrac{2dt}{t}$. Vậy

$$I = \int_{1+2\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = 2\ln|t|\Big]_{1+2\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}} = 2\ln\frac{3+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 13. *Tính* $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(-4+5x-x^2)^3}}$.

Viết lại $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\big((x-1)(4-x)\big)^3}$.

Ta tìm nguyên hàm $x = a + (b-a)\sin^2 t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$x = 1 + 3\sin^2 t \Longrightarrow dx = 2\sin 2tdt.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\big((x-1)(4-x)\big)^3}} = \frac{3\sin 2tdt}{\sqrt{(3\sin^2 t \cdot 3\cos^2 t)^3}} = \frac{3\sin 2tdt}{3^3\sin^3 2t} = \frac{1}{9}\cdot\frac{dt}{\sin^2 2t}.$$

Suy ra nguyên hàm là $-\dfrac{1}{9}\operatorname{cotg} 2t = -\dfrac{5-2x}{2\sqrt{(x-1)(4-x)}}$.

Vậy $I = \dfrac{2x-5}{2\sqrt{(x-1)(4-x)}}\Big]_2^3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.r$

Ví dụ 14. *Tính* $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Đổi biến $x = \dfrac{1}{t} \Longrightarrow dx = -\dfrac{dt}{t^2}$.

$$I = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln|t + \sqrt{t^2+1}|\Big]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln\big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\big) = \ln\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}.$$

Chú ý. Gặp $\int \dfrac{dx}{(\lambda x+\mu)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ thì đặt $\lambda x+\mu=\dfrac{1}{t}$.

Ví dụ 15. *Tính* $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$.

Đổi biến $t=x+\sqrt{1+x^2}\implies t-x=\sqrt{1+x^2}\implies (t-x)^2=1+x^2\implies x=\dfrac{t^2-1}{2t}\implies$ $\sqrt{1+x^2}=t-\dfrac{t^2-1}{2t}=\dfrac{t^2+1}{2t}$.

$$dx=\frac{4t^2-2(t^2-1)}{4t^2}dt=\frac{2t^2+2}{4t^2}dt=\frac{t^2+1}{2t^2}.$$

Vậy $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{(t^2+1)dt}{t^2(t+1)}$.

Phân tích $\dfrac{t^2+1}{t^2(t+1)}=\dfrac{A}{t^2}+\dfrac{B}{t}+\dfrac{C}{t+1}\implies\begin{cases}A&=1\\B&=-1\\C&=2\end{cases}$.

$$I=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\Big(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}\Big)dt=\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{t}-\ln|t|+2\ln|t+1|\Big)\Big]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}=1.$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx \qquad \int_0^{\sqrt{7}} x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1-x^2}{x^2}dx \qquad \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx \qquad \int_7^2 \frac{dx}{\sqrt{2+x}+1}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} \qquad \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$$

Ví dụ 16. *Tính* $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $\begin{cases}u&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\dv&=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}\end{cases}\implies\begin{cases}du&=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\\v&=\sqrt{x^2+1}.\end{cases}$

Đáp số: $I=2\ln 3-\sqrt{3}$.

Ví dụ 17. *Tính* $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

C1.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^2+1+x-1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx \\ &= \cdots = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+\sqrt{2}| - 1. \end{aligned}$$

C2. Đặt $\begin{cases} u &= x+1 \\ dv &= \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du &= dx \\ v &= \sqrt{x^2+1}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= (x+1)\sqrt{x^2+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx \\ &= 2\sqrt{2} - 1 - \left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right)\Big]_0^1 \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+\sqrt{2}| - 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 18. *Tính* $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

C1. Tích phân từng phần

Đặt $\begin{cases} u &= x^2 \\ dv &= \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du &= 2xdx \\ v &= \sqrt{x^2+1}. \end{cases}$

$$I = x^2\sqrt{x^2+1}\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x\sqrt{x^2+1}dx = -\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\Big]_{-1}^1 = 0.$$

C2. Hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ. $I = 0$.

Ví dụ 18. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$.

Trục căn ở mẫu

$$I = \int_0^1 \frac{x^3(x-\sqrt{x^2+1})}{-1}dx = \underbrace{\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx}_{\text{đổi biến } t=\sqrt{x^2+1}} - \int_0^1 x^4dx.$$

Đáp số $I = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{15}$.

Ví dụ 18. *Tính* $I = \displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

* Đổi biến $t = \sqrt{x^2-1} \Longrightarrow dt = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}},\ \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{dt}{t^2+1}$.

  Tiếp tục đổi biến, cuối cùng được $I = \dfrac{\pi}{12}$.

* Có thể đổi biến $x = \dfrac{1}{\cos t}$ ngay từ đầu.

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

1. Phép phân tích đưa về các dạng nguyên hàm cơ bản

Ví dụ 1. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

C1. Ta có

$$1 = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-x\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-x\right].$$

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x}{\cos x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx + \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \sqrt{2}\ln 2.$$

C2.

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x(\sin x + \cos x)} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}$$

$$= \sqrt{2}\ln|\operatorname{tg} x + 1|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\ln 2.$$

Ví dụ 2. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

Viết lại $I = \displaystyle\int_0^{\frac{pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$.

* Dùng đồng nhất:

$$\cos x = a(\sin x + \cos x) + b(\cos x - \sin x) \Longrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\right)dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.$$

* Có thể sử dụng hàm phụ.

Bài tập. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}dx.$

Ví dụ 3. *Tính* $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Đổi biến $t = \operatorname{tg} x$ ta được $I = \dfrac{42\sqrt{3}-8}{15}.$

Ví dụ 4. *Tính* $I = \displaystyle\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}}$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}.$

$$I = \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{dx}{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}} = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}} = 2\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}$$
$$= 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|\Bigg]_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} = \ln 3.$$

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\Bigg]_0^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tg}\frac{1}{4}.$$

Bài tập. *Tính* $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 2}dx.$

Ví dụ 4. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx.$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right| dx$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| dx$$
$$= \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx\right) = 4\sqrt{2}.$$

2. Phương pháp đổi biến

Các dấu hiệu đổi biến:

(i) Lẻ theo $\sin x$, đặt $t = \cos x$.

(ii) Lẻ theo $\cos x$, đặt $t = \sin x$.

WWW. VIETMATHS.COM

(iii) Chẵn theo $\sin x$ và $\cos x$, đặt $t = \operatorname{tg} x$ (hoặc $t = \operatorname{cotg} x$).

Ngoài ra mọi tích phân đều có thể đặt $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Ví dụ 6. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$, $\quad J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}dx.$

* Tính I : Đổi biến $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx$.

$$I = \int_0^1 (1-t^2)t^2 dt = \frac{2}{15}.$$

* Tính J : $J = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x \cos 2x}{3+\cos 2x}dx.$

Đổi biến $t = \cos 2x \Longrightarrow dt = -2\sin 2x dx$

$$J = -\int_1^0 \frac{2tdt}{3+t} = -2\int_1^0 \frac{tdt}{t+3} = 2\int_0^1 \frac{t+3-3}{t+3}dt$$
$$= 2(t - 3\ln|t+3|)\Big]_0^1 = \frac{4}{15} + 6\ln\frac{3}{4}.$$

Bài tập. *Tính* $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2\sin x \cos x dx}{(2+\sin x)^2}$, $\quad J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}.$

Ví dụ 7. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}dx.$

Viết lại $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{4-(\sin x - \cos x)^2}}dx.$

Đổi biến $t = \sin x - \cos x$, ta được $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$

Tiếp tục đổi biến $t = 2\sin u \Longrightarrow dt = 2\cos u du$. Ta có $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 du = \frac{\pi}{6}.$

Ví dụ 8. *Tính*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x + \sin x}\ , \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx.$$

Tính I : Đặt $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, ta được $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1|\Big]_0^1 = \ln 2.$

Tính J : đặt $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Bài tập. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x + 4\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx.$

Gợi ý: Tách ra rồi đổi biến.

Ví dụ 9. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin2xdx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}.$

(i) $a = b:\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{|a|} = -\frac{1}{4|a|}.$

(ii) $a \neq b$: đổi biến $t = \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$, ta được

$$I = \frac{2}{a^2 - b^2} \int_{|b|}^{|a|} dt = \frac{2(|a| - |b|)}{a^2 - b^2}.$$

3. Tích phân từng phần

$$\int P(x) \sin \alpha x dx \qquad \int P(x) \cos \alpha x dx$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx \qquad \int e^{ax} \sin(bx) dx,\ a, b \neq 0.$$

Bài tập. *Tính* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos^2 x dx.$

Ví dụ 10. *Tính* $I \int_0^1 x \operatorname{tg}^2 dx.$

$$I = \int_0^1 x\Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big) dx = \int_0^1 \frac{x dx}{\cos^2 x} - \int_0^1 x dx.$$

Tích phân từng phần vào tích phân thứ nhất, ta được $I_1 = \operatorname{tg} 1 + \ln(\cos 1).$

Tích phân thứ hai $I_2 = \frac{1}{2}.$

Vậy $I = \operatorname{tg} 1 + \ln(\cos 1) - \frac{1}{2}.$

Bài tập. *Tính* $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx.$ (ĐS: $\frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{1}{2} + 1$).

4. Dùng hàm phụ

Ví dụ 11. *Tính* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^2 2x dx.$

Xét $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 2x dx.$ Ta có

$$I + J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4x) dx = \frac{\pi}{4}$$
$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 6x + 3 \cos 2x) dx = 0.$$

Vậy $I = \frac{\pi}{8}.$

Chú ý.

(i) Có thể biến đổi lượng giác:

$$\begin{aligned}\cos^2 x\cos^2 2x &= \frac{1}{4}(1+\cos 2x)(1+\cos 4x)\\ &= \frac{1}{8}(2+3\cos 2x+2\cos 4x+\cos 6x).\end{aligned}$$

(ii) Đổi biến $t=\frac{\pi}{2}-x$ ta được $I=J$. Tính $I+J$ ta sẽ suy ra được I.

Bài tập. *Tính* $I=\int_0^{\pi} x\cos^4 x\sin^3 x dx.$ (ĐS: $\frac{2\pi}{35}$).

Ví dụ 12. *Tính* $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx.$

Đổi biến $t=\frac{\pi}{2}-x.$

Ví dụ 13. *Tính* $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x dx.$

Đặt $t=\sin^2 x.$

Hàm vô tỉ: $I=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx.$

(i) Đổi biến $x=\operatorname{tg} t \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^2} \xrightarrow{u=\sin t} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2}.$

(ii) Đổi biến $t=x+\sqrt{x^2+1}.$

(iii) Tích phân từng phần: $\begin{cases} u &= \sqrt{x^2+1}\\ dv &= dx.\end{cases}$

TÍCH PHÂN CÁC HÀM SIÊU VIỆT

1. Sử dụng nguyên hàm cơ bản

Ví dụ 1. *Tính* $I=\int_1^2 \frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$

$$\begin{aligned}I &= \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \int_1^2 \frac{d(e^x)}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|\Bigg]_1^2\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{e^2-1}{e^2+1}-\ln\frac{e-1}{e+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{(e+1)^2}{e^2+1}.\end{aligned}$$

Bài tập. *Tính* $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

Ví dụ 2. *Gọi* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$. *Tính* $S = I_n + I_{n-1}$.

$$S = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}dx$$
$$= \int_0^1 e^{-(n-1)x}dx = \frac{e^{(1-n)x}}{1-n}\Big]_0^1 = \frac{e^{1-n}-1}{1-n}.$$

2. Phương pháp phân tích

Ví dụ 3. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(e^x+1)} = \int_0^1 \frac{e^x+1-e^x}{e^x(e^x+1)}dx = \int_0^1 (\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1})dx$$
$$= \int_0^1 (\frac{1}{e^x} - \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1})dx = \int_0^1 (e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{e^x+1})dx$$
$$= \big(-e^{-x} - x + \ln(e^x+1)\big)\Big]_0^1 = \ln\frac{e-1}{2} - e^{-1}.$$

Bài tập. *Tính các tích phân sau*

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+3}; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}; \qquad \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{5+e^x}; \qquad \int_0^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

3. Đổi biến

Ví dụ 4. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+e^x)^2}{e^x}dx$.

Đổi biến $t = e^x$, ta được $I = \displaystyle\int_1^e \frac{(1+t)^2}{t^2}dt = e - \frac{1}{e} + 2$.

Ví dụ 5. *Tính* $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx$.

Đổi biến $t = \ln x \Longrightarrow dt = \dfrac{dx}{x}$. Ta được

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{2+t}}{2}dt = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}.$$

Ví dụ 6. *Tính* $I = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Đổi biến $t=\sqrt{1+e^x}\Longrightarrow t^2=1+e^x\Longrightarrow 2tdt=e^xdx.$

$$I=2\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg]_{\sqrt{2}}^{2}=-\ln 3(3-2\sqrt{2}).$$

Ví dụ 7. *Tính* $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{4-x^2}\ln\frac{2+x}{2-x}dx.$

Đổi biến $t=\ln\dfrac{2+x}{2-x}\Longrightarrow dt=\dfrac{dx}{4-x^2}.$

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}tdt=\frac{1}{2}t^2\Big]_0^{\ln 3}=\frac{\ln^2 3}{2}.$$

Bài tập. *Tính các tích phân sau*

$$\int_0^1\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1};\qquad \int_{-2}^{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})dx;\qquad \int_0^1\frac{(1+e^x)^2}{e^x}dx;$$

$$\int_0^e\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx\qquad \int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}};\qquad \int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$$

$$\int_1^e\frac{\ln x\cdot\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx.$$

4. Tích phân từng phần

Ví dụ 8. *Tính* $I=\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx.$

Đặt $\begin{cases}u&=\ln(1+x^2)\\ dv&=xdx\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du&=\dfrac{2xdx}{1+x^2}\\ v&=\dfrac{x^2}{2}.\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x^3dx}{1+x^2}=\frac{\ln 2}{2}-\int_0^1\frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}dx\\&=\frac{\ln 2}{2}-\int_0^1\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{\ln 2}{2}-\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1\\&=\ln 2-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Bài tập. *Tính các tích phân*

$$\int_0^2 xe^{2x}dx;\qquad \int_0^1 x^2e^{-x}dx;\qquad \int_0^1 x^2\ln(2x+1)dx.$$

Ví dụ 9. *Tính* $I=\displaystyle\int_0^1 e^{2x+e^x}dx.$

Viết lại $I = \int_0^1 e^x \cdot e^{e^x} \cdot e^x dx$. Đổi biến $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx$. Ta có

$$I = \int_1^e te^t dt = te^t\Big]_1^e - \int_1^e e^t dt = e^{e+1} - e^e.$$

Bài tập. *Tính các tích phân*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cdot \sin x \cdot \cos^3 x dx; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

Ví dụ 10. *Tính* $I = \int_1^e \dfrac{\ln \sqrt[3]{1 + \ln^2 x}}{x} dx.$

Đổi biến $t = \ln x$, ta được $I = \dfrac{1}{2} \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt.$

Đặt $\begin{cases} u &= \ln(1+t^2) \\ dv &= dt \end{cases}$ $\begin{cases} du &= \dfrac{2tdt}{1+t^2} \\ v &= t. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\left[t\ln(1+t^2)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2}\right] \\ &= \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}\left(\int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\right) \\ &= \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}t\Big]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\ln 3 - 2}{3} + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Đổi biến $t = \operatorname{tg} u$, cuối cùng ta được $I = \dfrac{\ln 3 - 2}{3} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\pi}{4}.$

Ví dụ 11. *Tính* $I = \int_{-1}^1 \dfrac{x^4 + \sin x}{x^2 + 1} dx.$

Hướng dẫn: $I = \int_{-1}^1 \dfrac{x^4 + \sin x}{x^2+1} dx = \int_{-1}^1 \dfrac{x^4 dx}{x^2+1} + \underbrace{\int_{-1}^1 \dfrac{\sin x}{x^2+1}}_{=0 \text{ do hàm lẻ}}.$

TÍCH PHÂN TRUY HỒI

1. Tích phân từng phần

Ví dụ 1. *Cho* $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx.$

a) Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

b) Tính I_n.

a) Đặt $\begin{cases} u &= x^n \\ dv &= \sqrt{1-x}dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du &= nx^{n-1}dx \\ v &= -\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{2}{3}x\sqrt{(1-x)^3}\Big]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx \\ &= \frac{2n}{3}\left(\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\right) \\ &= \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n). \end{aligned}$$

Vậy $\quad I_n = \dfrac{2n}{2n+3} \cdot I_{n-1} \qquad (1).$

b) Từ (1) ta được

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2(n-1)}{2n+1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-1} \cdots \frac{2}{5} I_0 \\ &= \frac{2^n n!}{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)} \cdot \int_0^1 \sqrt{1-x}dx \\ &= \frac{2^n n!}{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)} \cdot \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2^{n+1} n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+3)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. *Cho* $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx.$

a) Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

b) Tính I_n.

a) Đặt $\begin{cases} u &= \cos^n x \\ dv &= \cos nx dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du &= -n\cos^{n-1} x \sin x dx \\ v &= \dfrac{1}{n}\sin nx. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}\sin nx \cos^n x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^{n-1} x\big[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\big]dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos^{n-1} x \cos(n-1)x dx - \int_0^\pi \cos^{n-1} x\cos(n+1)xdx\right) \\ &= \frac{I_{n-1}}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Từ (1) ta có $I_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot I_0 = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\int_0^\pi dx = \dfrac{\pi}{2^n}.$

Ví dụ 3. *Cho* $I_n = \displaystyle\int_0 \frac{\pi}{2} x^n \sin x dx.$

a) Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-2}.

b) Tính I_2, I_3.

Tích phân từng phần hai lần. Đặt $\begin{cases} u &= x^n \\ dv &= \sin x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du &= nx^{n-1}dx \\ v &= -\cos x \end{cases}$ ta được

$$I_n = -x^n \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cos x dx.$$

Tiếp theo, đặt $\begin{cases} u &= x^{n-1} \\ dv &= \cos x dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du &= (n-1)x^{n-2}dx \\ v &= \sin x. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_n &= n\Big(x^{n-1}\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\sin x dx\Big) \\ &= n\Big[\big(\frac{\pi}{2}\big)^{n-1} - (n-1)I_{n-2}\Big] = n\big(\frac{\pi}{2}\big)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}. \end{aligned}$$

Bài tập. *Cho* $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx.$

a) Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

b) Tính I_n.

Ví dụ 4. Cho tích phân $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx,\ n \in \mathbb{Z}^+.$

a) Chứng minh $I_n \geq I_{n+1}$.

b) Lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

c) Chứng minh $\dfrac{1}{2(2n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(2n-1)}$.

a) $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow 0 \leq \operatorname{tg} x \leq 1 \Longrightarrow \operatorname{tg}^{2(n+1)} x \leq \operatorname{tg}^{2n} x$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2(n+1)} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx \Longrightarrow I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

b) Viết I_n lại:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x \operatorname{tg}^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x\big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\big)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x d(\operatorname{tg} x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x dx = \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} x}{2n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} \\ &= \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}. \end{aligned}$$

c) Kết quả ở a) chứng tỏ dãy I_n giảm.

$$\begin{aligned} 2I_n = I_n + I_n &\leq I_n + I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} \Longrightarrow I_n \leq \frac{1}{2(2n-1)} \\ 2I_n = I_n + I_n &\geq I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \Longrightarrow I_n \geq \frac{1}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $\dfrac{1}{2(2n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(2n-1)}$.

Ví dụ 5. *Chứng minh* $\dfrac{5}{2} \leq \displaystyle\int_2^3 \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}} \leq \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

Xét $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}; \quad x \in [2,3]$. Ta có

$$f'(x) = \frac{x(x^2-2)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \forall x \in [2,3].$$

Vậy

$$\begin{aligned} f(2) \leq f(x) \leq f(3) &\Longrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{9}{2\sqrt{2}} \\ &\Longrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}\int_2^3 dx \leq \int_2^3 f(x)dx \leq \frac{9}{2\sqrt{2}}\int_2^3 dx \\ &\Longrightarrow \frac{5}{2} \leq \int_2^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{9\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6. *Chứng minh* $\dfrac{2}{e^2} \leq \displaystyle\int_0^2 e^{x-x^2}dx \leq 2\sqrt[4]{e}$.

Xét hàm $\quad y = x - x^2, \quad x \in [0,2]$.

Ta có $y' = 1 - 2x$.

$\Longrightarrow -2 \leq y \leq \dfrac{1}{4}, \quad \forall x \in [0,2] \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$ đpcm.

Ví dụ 7. *Cho tích phân* $I(x) = \displaystyle\int_0^x (e^{2t} + e^{-2t})dt$.

a) Tính $I(x)$ *khi* $x = \ln 2$.

b) Giải và biện luận phương trình $I(x) = m$.

Ta có $I(x) = \left(\dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big]_0^x = \dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

a) Với $x = \ln 2$ ta có $\quad I(\ln 2) = \dfrac{15}{8}$.

b) Đặt $t = e^{2x} > 0$. Giải ra $\;t = m + \sqrt{1+m^2}$. Vậy với mọi m phương trình có nghiệm duy nhất $x = \ln\sqrt{m + \sqrt{1+m^2}}$.

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình phẳng

a) Giới hạn bởi một đường: $D : \begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a \\ x = b. \end{cases}$

$$S_D = \int_a^b |f(x)|dx.$$

b) Giới hạn bởi một đường và trục Ox: $D : \begin{cases} y = f(x) \quad (\mathcal{C}) \\ Ox. \end{cases}$

Tìm hoành độ giao điểm của $(\mathcal{C})$ và Ox. Giả sử các hoành độ giao điểm là $x_1, \ldots, x_n$. Khi đó

$$S_D = \int_{x_1}^{x_n} |f(x)|dx.$$

c) Giới hạn bởi hai đường:

Nếu $D_1 : \begin{cases} y = f(x) \quad (\mathcal{C}_1) \\ y = g(x) \quad (\mathcal{C}_2) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ thì $S_{D_1} = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$

Nếu $D_2 : \begin{cases} y = f(x) \quad (\mathcal{C}_1) \\ y = g(x) \quad (\mathcal{C}_2) \end{cases}$ thì tìm hoành độ giao điểm của $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$. Giả sử các hoành độ giao điểm là $x_1 < \cdots < x_n$. Khi đó

$$S_{D_2} = \int_{x_1}^{x_n} |f(x) - g(x)|dx.$$

Ví dụ 1.

$a)\ D_1 : \begin{cases} y = \sin^2 x \cos^3 x \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\qquad b)\ D_2 : \begin{cases} x = 1 \\ x = e \\ y = 0 \\ y = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} S_{D_1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |sin^2 x \cos^3 x|dx \quad \text{chú ý } \cos x \geq 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{3\cos x - \cos 3x}{4} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos 2x \cos x - \cos 3x + 3\cos x - \cos 2x \cos 3x)dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 5x + 4\cos x\Big)dx \\ &= \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{10}\sin 5x + 4\sin x\Big)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{15} \text{ (đvdt).} \end{aligned}$$

$$S_{D_2} = \int_1^e \left|\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right| dx = \int_1^e \frac{\ln x dx}{2\sqrt{x}} \quad \left(\textbf{Đặt} \begin{cases} u &= \ln x \\ dv &= \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases} \right)$$

$$= \sqrt{x}\ln x \Big]_1^e - \int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x} dx = (\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x})\Big]_1^e = 2 - \sqrt{e} \text{ (đvdt)}.$$

Bài tập. *Tính diện tích các miền*

a) $D : \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x = -1 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ *b)* $D : \begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x \\ y = 0. \end{cases}$

c) Khảo sát và vẽ đồ thì hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} \quad (\mathcal{C}).$

Tính S_D *biết* $D : \begin{cases} (\mathcal{C}) \\ y = 0 \\ x = 0, \ x = 1 \end{cases}$.

Ví dụ 3. *Tính* S_D *biết* $D : \begin{cases} y = \dfrac{1}{\sin^2 x} \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ x = \dfrac{\pi}{6}, \ x = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

$$S_D = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left| \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right| dx.$$

- $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow 0 < \sin x \le \cos x \Longrightarrow \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} \ge 0.$
- $\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow 0 < \cos x \le \sin x \Longrightarrow \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} \le 0.$

$$S_D = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \frac{8}{\sqrt{3}} - 4.$$

Ví dụ 4. $D : \begin{cases} y = 2^x \\ y = 3 - x \\ x = 0. \end{cases}$

$$S = \int_0^1 (3 - x - 2^x) dx = \frac{5}{2} - \frac{2}{\ln 2}.$$

Bài tập. *Tính diện tích các miền sau:*

$D : \begin{cases} y = \left|1 - 2\sin^2 \dfrac{3x}{2}\right| \\ y = 1 + \dfrac{12x}{\pi} \\ x = 0, \ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $D : \begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \\ x = 1. \end{cases}$

Ví dụ 5. *Tính diện tích miền* $D : \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x. \end{cases}$

$$S = \int_0^3 (-x^2 + 4x - x^2 + 2x)dx = 9 \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ 6. *Tính diện tích miền* $D : \begin{cases} y^2 - 2y + x = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$

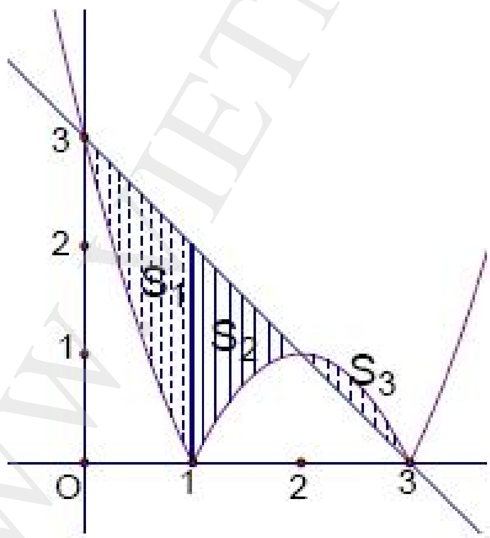
Phương trình tung độ giao điểm: $y^2 - 2y = y \iff \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3. \end{array}\right.$

$$S = \int^{0} {}^{3}| - y^2 + 2y + y|dy = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 7. *Tính diện tích miền* $D : \begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3| \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $|x^2 - 4x + 3| = 3 - x$

$\iff \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ (x^2 - 4x + 3 + 3 - x)(x^2 - 4x + 3 - 3 + x) = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3. \end{array}\right.$



$S = S_1 + S_2 + S_3$ với $S_1 = \frac{7}{6}$, $S_2 = \frac{5}{6}$, $S_3 = \frac{1}{6}$. Vậy $S = \frac{13}{6}$.

Bài tập. *Tính diện tích các miền sau:*

$D : \begin{cases} y = x^2 \\ x = -y^2 \end{cases}$ $\qquad$ $D : \begin{cases} y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = |x| \end{cases}$

$D : \begin{cases} y = |x^2 - 1| \\ y = |x| + 5 \end{cases}$ $\qquad$ $D : \begin{cases} y = ax^2 \quad (a > 0) \\ y = ax + 2a. \end{cases}$

d) Giới hạn bởi ba đường: $D:\begin{cases} y=f(x)\\ y=g(x)\\ y=h(x).\end{cases}$

Tìm giao điểm của từng cặp đường rồi suy ra diện tích miền cần tìm.

Ví dụ 8. *Tính diện tích miền* $D:\begin{cases} y=x^2\\ y=\dfrac{x^2}{27}\\ y=\dfrac{27}{x}.\end{cases}$

$$x^2=\frac{x^2}{27}\iff x=0,\qquad x^2=\frac{27}{x}\iff x=3,\qquad \frac{x^2}{27}=\frac{27}{x}\iff x=9.$$

$$S=S_1+S_2=\int_0^3(x^2-\frac{x^2}{27})dx+\int_3^9(\frac{27}{x}-\frac{x^2}{27})dx=27\ln 3.$$

Bài tập. *Tính diện tích các miền:*

$$D:\begin{cases} y=x^2\\ y=\dfrac{x^2}{8}\\ y=8\end{cases}\qquad D:\begin{cases} y=-x^2+4x-3\quad (\mathcal{C})\\ \text{Hai tiếp tuyến của } (\mathcal{C}) \text{ tại } A(0,-3), B(3,0).\end{cases}$$

e) Diện tích hình giới hạn bởi các đường bậc hai.

Ví dụ 9. *Tính diện tích hình giới hạn bởi đường tròn* $(C):(x-1)^2+y^2=1$ *và đường thẳng* $(d):y=x$. *Tính tỉ số diện tích hai phần.*

Ví dụ 10. *Tính diện tích hình Elip* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Ví dụ 11. *Tính tỉ số diện tích hai hình phẳng giới hạn bởi các đường* $(P):y^2=2x$ *và* $(C):x^2+y^2=8.$

ĐS: $\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}.$

Bài tập.

1. *Tính diện tích miền* $D:\begin{cases}(P):y^2=2px\\ (C):27py^2=8(x-p)^3.\end{cases}$

2. *Tính diện tích phần chung của hai elip:* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1.$

3. *Tính tỉ số diện tích các miền*

$$D_1:\begin{cases}(P):y^2=2x\\ (C):x^2+y^2=24\end{cases}\qquad \text{và}\qquad D_2:\begin{cases}(P):y^2=2x\\ (E):\dfrac{x^2}{2}+y^2=1.\end{cases}$$

Ví dụ 12. *Xét hình giới hạn bởi* $(P):y=x^2$ *và đường thẳng đi qua* $A(1,4)$ *có hệ số góc* k. *Xác định* k *để* S *nhỏ nhất.*

$(d): k(x-1)+4, \quad (P)\cap(d)=\{B,C\}$. Khi đó x_B, x_C là hai nghiệm của phương trình $x^2 - kx + k - 4$. Vậy ta có $\begin{cases} x_B + x_C = k \\ x_B \cdot x_C = k-4. \end{cases}$

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_B}^{x_C} (kx - k + 4 - x^2)dx = \left(\frac{kx^2}{2} - (k-4)x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{x_B}^{x_C} \\ &= \frac{k}{2}(x_C - x_B)^2 - (k-4)(x_C - x_B) - \frac{1}{3}(x_C^3 - x_B^3) = (k^2 - 4k + 16)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

(S nhỏ nhất) $\Longleftrightarrow$ ($k^2 - 4k + 16$ nhỏ nhất) $\Longleftrightarrow k = 2$.

Vậy $S_{\min} = 24\sqrt{3}$ khi $k = 2$.

2. Thể tích

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra do các miền sau đây quay quanh Ox.

1. $D = \left\{y = \operatorname{tg} x, x = 0, x = \dfrac{\pi}{3}, y = 0\right\}$.
2. $D = \{y = x\ln x, y = 0, x = 1, x = e\}$.
3. $G = \{y = 4 - x^2, y = x^2 + 2\}$.
4. $D = \left\{y = \dfrac{1}{x^2+1}, y = \dfrac{x^2}{2}\right\}$.
5. *Hình tròn* $x^2 + (y-2)^2 \le 1$.