TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Dang Thanh Nam

Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Email : dangnamneu@gmail.com

Yahoo: changtraipkt

Mobile: 0976266202

Các bài toán tích phân trong đề thi TSĐH được đánh giá là bài toán quan trọng, luôn xuất hiện dưới dạng tính tích phân trực tiếp hoặc là xác định diện tích, thể tích giới hạn bởi các đường cong.

Để làm tốt dạng toán này học sinh nên lưu ý nhớ và vận dụng lịnh hoạt công thức các nguyên hàm cơ bản, cách xác định công thức tính thể tích và diện tích giới hạn bởi các đường cong.

Hai phương pháp cơ bản được sử dụng xuyên suốt cho các bài toán tích phân là đổi biến và tích phân từng phần(thường là kết hợp cả 2 phương pháp này).

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

<u>Khái niệm nguyên hàm của một hàm số:</u>

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng D

Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in D$

Và nguyên hàm của $f(x)$ được xác định theo công thức, thực chất đây chỉ là ký hiệu của nguyên hàm của một hàm số:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Để tìm nguyên hàm của một hàm số chúng ta dựa vào nguyên hàm của một số hàm cơ bản:

Nguyên hàm của một số hàm cơ bản:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = \cos x + c$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln\left|\cos x\right| + c$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln\left|\sin x\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$$

Khái niệm tích phân của một hàm số:

Tích phân của một hàm số $f(x)$ được xác định trên một đoạn $[a,b]$ là giá trị của $F(b) - F(a)$ và được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN

Dưới đây sẽ trình bày một số bài toán cơ bản nhất của tích phân, cách thức tiến hành là đưa biểu thức dưới dấu tích phân về dạng $\int f(u)du$.

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x-1)(x-1)^{100} dx$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^1 (2x-1)(x-1)^{100} dx = \int_0^1 \left(2(x-1)+1\right)(x-1)^{100} dx = 2\int_0^1 (x-1)^{101} dx + \int_0^1 (x-1)^{100} dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$= 2\int_0^1 (x-1)^{101} d(x-1) + \int_0^1 (x-1)^{100} d(x-1) = \frac{1}{51}(x-1)^{102}\Big|_0^1 + \frac{1}{101}(x-1)^{100}\Big|_0^1 = \frac{152}{5151}.$$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_{\frac{-1}{2}}^{0} x\sqrt{2x+1}dx$

Lời giải:

Ta có $I = \int_{\frac{-1}{2}}^{0} x\sqrt{2x+1}dx = \int_{\frac{-1}{2}}^{0} \frac{(2x+1)-1}{2}\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{-1}{2}}^{0} (2x+1)^{\frac{3}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{-1}{2}}^{0} (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{-1}{2}}^{0} (2x+1)^{\frac{3}{2}} d(2x+1) - \frac{1}{4}\int_{\frac{-1}{2}}^{0} (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{0} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{0} = \frac{-1}{15}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^4+5}{x+1}dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^1 \frac{x^4+5}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^4-1+6}{x+1}dx = \int_0^1 \left[(x-1)(x^2+1) + \frac{6}{x+1}\right]dx$

$$= \int_0^1 (x^3 - x^2 + x - 1) + \int_0^1 \frac{6}{x+1}dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^1 + 6\ln|x+1|\Big|_0^1 = \frac{-7}{12}.$$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

Lời giải:

Ta có $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c.$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^4\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right)^2}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-x}\right)dx=\left(\sqrt{x}-e^{-x}\right)\Big|_1^4=1+\frac{1}{e}-\frac{1}{e^4}$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int\frac{\cos^5x}{1-\sin x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{\cos^5x}{1-\sin x}dx=\int\frac{\cos^3x\left(1-\sin^2x\right)}{1-\sin x}dx=\int\cos^3x\left(1+\sin x\right)dx$

$=\int\cos^3xdx+\int\cos^3x\sin xdx=\int\left(1-\sin^2x\right)d\left(\sin x\right)-\int\cos^3xd\left(\cos x\right)$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{4}\cos^4x+c.$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+\left(x+1\right)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+\left(x+1\right)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(x\sin x+\cos x\right)+x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$

$=x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(x\sin x+\cos x\right)}{x\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}+\ln\left|x\sin x+\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\pi+4\sqrt{2}}{8}.$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int\frac{\tan^3x}{\cos2x}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int \frac{\tan^3 x}{\cos 2x}dx=\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right)}dx=\int \frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}d\left(\tan x\right)$

$=\int\left(\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}-\tan x\right)d\left(\tan x\right)=\int \frac{\tan x}{1-\tan^2 x}d\left(\tan x\right)-\int \tan x d\left(\tan x\right)$

$=\frac{-1}{2}\int \frac{d\left(1-\tan^2 x\right)}{1-\tan^2 x}-\frac{1}{2}\tan^2 x=-\frac{1}{2}\ln\left|1-\tan^2 x\right|-\frac{1}{2}\tan^2 x+c.$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_0^2 \min\left(x^2,\sqrt{x}\right)dx.$

Lời giải:

Xét $x^2-\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1.$

Vậy với $0\leq x\leq 1\Rightarrow \min\left(x^2,\sqrt{x}\right)=x^2.$

Với $1\leq x\leq 2\Rightarrow \min\left(x^2,\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}.$

Vậy $I=\int_0^2 \min\left(x^2,\sqrt{x}\right)dx=\int_0^1 \min\left(x^2,\sqrt{x}\right)dx+\int_1^2 \min\left(x^2,\sqrt{x}\right)dx$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 \sqrt{x}dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^2=\frac{4\sqrt{2}-1}{3}.$$

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \min\left(\tan x,x\right)dx.$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=\tan x-x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right].$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1\geq 0,\forall x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

Ta có $f(0)=0$. Từ đó suy ra

$$f(x)\leq f(0)=0,x\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]\Leftrightarrow \tan x\leq x,x\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]\Rightarrow \min\left(\tan x,x\right)=\tan x,x\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$$

$$f(x)\geq f(0)=0,x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Leftrightarrow \tan x\geq x,x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow \min\left(\tan x,x\right)=x,x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$$

Vậy $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\min\left(\tan x,x\right)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\min\left(\tan x,x\right)dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\min\left(\tan x,x\right)dx$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan xdx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi^2}{32}-\ln\left|\cos x\right|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 x\left|1-x\right|dx$.

Lời giải:

Với $0\leq x\leq 1\Rightarrow 1-x\geq 0\Rightarrow \left|1-x\right|=1-x$.

Với $1\leq x\leq 2\Rightarrow 1-x\leq 0\Rightarrow \left|1-x\right|=x-1$.

Vậy $I=\int\limits_0^2 x\left|1-x\right|dx=\int\limits_0^1 x\left(1-x\right)dx+\int\limits_1^2 x\left(x-1\right)dx$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=1.$$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\frac{\left|x^2-x\right|}{x^2+3}dx$.

L ời gi ải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta c ó $I = \int_0^1 \frac{\left|x^2 - x\right|}{x^2+3}dx + \int_1^3 \frac{\left|x^2 - x\right|}{x^2+3}dx$

$= -\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2+3}dx + \int_1^3 \frac{x^2 - x}{x^2+3}dx$

Xét $K = -\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2+3}dx = -\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3}\right)dx = -\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(x^2+3\right)}{x^2+3} + \int_0^1 \frac{3}{x^2+3}dx$

$= -1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \int_0^1 \frac{3dx}{x^2+3}$

Đặt $x = \sqrt{3}\tan t \Rightarrow dx = \sqrt{3}\frac{dt}{\cos^2 t}; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Khi đó $K = -1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = -1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Tương tự : $L = \int_1^3 \frac{x^2 - x}{x^2+3}dx = 2 - \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Vậy $I = K + L = 1 + \ln\frac{2}{3}$.

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2e^x}{1+2e^x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 \frac{x^2\left(1+2e^x\right) + e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \frac{e^xdx}{1+2e^x}$

$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+2e^x\right)}{1+2e^x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|1+2e^x\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\left(1+2e\right) - \frac{1}{2}\ln 3.$

Bài 14. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x\left(\sqrt{2+\ln x} + \sqrt{2-\ln x}\right)}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\dfrac{dx}{x}; x=1\Rightarrow t=0; x=e\Rightarrow t=1$

Vậy $I=\int\limits_0^1 \dfrac{tdt}{\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}}=\int\limits_0^1 t\left(\dfrac{\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}}{2t}\right)dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}\right)dt$

$=\dfrac{1}{3}\sqrt{(2+t)^3}\Bigg|_0^1+\dfrac{1}{3}\sqrt{(2-t)^3}\Bigg|_0^1=\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

Bài 15. Tính tích phân $I=\int \dfrac{x^n}{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}}dx,\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

Lời giải:

Đặt $f_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\Rightarrow f'_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f_{n-1}(x)$

vậy $I=\int\dfrac{n!\left(f_n(x)-f_{n-1}(x)\right)}{f_n(x)}dx=n!\int\left(1-\dfrac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)}\right)dx=n!\int\left(1-\dfrac{f'_n(x)}{f_n(x)}\right)dx$

$=n!x-n!\ln f_n(x)+C=n!x-n!\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)+C$

Bài 16. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^1\dfrac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_{-1}^1\dfrac{\left(1+x+x^2\right)-\sqrt{x^4+3x^2+1}}{\left(1+x+x^2\right)^2-\left(x^4+3x^2+1\right)}dx=\int\limits_{-1}^1\dfrac{1+x+x^2}{2x\left(1+x^2\right)}dx-\int\limits_{-1}^1\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x\left(1+x^2\right)}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét tích phân $M = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x+x^2}{2x\left(1+x^2\right)}dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{1} + \arctan t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

$N = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x\left(1+x^2\right)}dx$, đặt $x=-t \Rightarrow dx=-dt; x=1 \Rightarrow t=-1; x=-1 \Rightarrow t=1$.

Khi đó $N = \int\limits_{1}^{-1} \frac{\sqrt{(-t)^4+3(-t)^2+1}}{2(-t)\left(1+(-t)^2\right)}(-dt) = -\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{t^4+3t^2+1}}{2t\left(1+t^2\right)}dt = -N \Rightarrow N=0$.

Vậy $I = M - N = \frac{\pi}{4}$.

Bài 17. Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}}$

Lời giải:

Ta có $\int \frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}} = \int \frac{dx}{x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}}} = \int \frac{x^{-n-1}dx}{\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{1+\frac{1}{n}}}$

$= \int \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-1-\frac{1}{n}} x^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}\int\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-1-\frac{1}{n}} d\left(1+\frac{1}{x^n}\right) = \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-\frac{1}{n}} + C$

Từ đó suy ra $I = \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-\frac{1}{n}}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

Bình luận: ở ví dụ này ta không trực tiếp tính I luôn, bởi phép biến đổi trên không thể thực hiện với mọi $x \in [0,1]$ nên thong qua nguyên hàm sau đó tính tích phân sau(kỹ thuật giấu cận).

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 18. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\left(e^x\sin x+1\right)\sin x}dx$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\left(e^x\sin x+1\right)\sin x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\left(\cos x+\sin x\right)}{\left(e^x\sin x+1\right)e^x\sin x}dx$

Đặt $t=e^x\sin x\Rightarrow dt=e^x\left(\sin x+\cos x\right)dx;x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=e^{\frac{\pi}{2}}$

Vậy $I=\int\limits_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}}^{e^{\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{t\left(t+1\right)}dx=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}}^{e^{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi}{3}\ln\left(\frac{e^{\frac{\pi}{6}}+2}{e^{\frac{\pi}{2}}+1}\right)$

Bài 19. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{\left(x^2+2\right)e^{2x}+x^2\left(1-e^x\right)-e^x}{e^{2x}-e^x+1}dx$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{x^2\left(e^{2x}-e^x+1\right)+2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}dx=\int\limits_0^{\ln 2}x^2dx+\int\limits_0^{\ln 2}\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}dx$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\ln 2}-\ln\left|e^{2x}-e^x+1\right|\Big|_0^{\ln 2}=2+\frac{\ln^3 2}{3}$

Bài 20. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}dx=\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}d\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\sqrt{2}-1$

Bài 21. Tính tích phân $I=\int\limits_1^e \left(\frac{\ln x}{2+\ln x}\right)^2 dx$.

Lời giải:

$$I=\int\limits_1^e \left(1-\frac{4\ln x+4}{\left(\ln x+2\right)^2}\right)dx=\int\limits_1^e \left(1-\frac{4\left(\ln x+2\right)-4x\left(\ln x+2\right)'}{\left(\ln x+2\right)^2}\right)dx$$

$$=\int\limits_1^e d\left(x-\frac{4x}{\ln x+2}\right)=\left(x-\frac{4x}{\ln x+2}\right)\Bigg|_1^e=1-\frac{e}{3}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x\left(1-x\right)^{100}dx$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 \left(2x+1\right)\left(x-1\right)^{100}dx$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^0 \left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^{100}dx$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{-1}{2}}^0 \left(3x+4\right)\sqrt{2x+1}dx$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^0 \left(x-1\right)^2\sqrt{x+1}dx$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 x^2\left|x^2-1\right|dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(cos^3x-1\right)\sin^2 xdx$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}max\left(\sin x,\cos x\right)dx$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x\cos x+\left(x-2\right)\sin x}{x\cos x-\sin x}dx$

Bài 10.Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{x^2\left(1+e^x\right)^2+e^x}{1+e^x}dx$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^x+3}{e^x+2e^{-x}+3}dx$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{xe^x\left(4+4\left(\sin x+\cos x\right)+\sin 2x\right)}{\left(1+\cos x\right)^2}dx$

Bài 13. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\min\left(\tan x+2\sin x,3x\right)dx.$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}max\left(e^x+\cos x,2+x-\frac{x^2}{2}\right)dx$.

Bài 15. Tính tích phân $I=\int_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln x}}{x}dx$

Bài 16. Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{\ln\left[\left(x+1\right)^{x+1}\left(x+2\right)^{x+2}\right]}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}dx$.

Bài 17. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}e^{\sqrt{x^2+1}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Bài 18. Tính tích phân $I=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}\cos^4\sqrt{x^2+1}}dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{A_n}{x-x_n}.$$

+ Nếu $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_i)^k...(x-x_n)$, trong đó x_i là các nghiệm của đa thức $Q(x)$ và k là số nghiệm bội x_i, thì ta giả sử

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\left[\frac{A_{i1}}{x-x_i}+\frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2}+...+\frac{A_{ik}}{(x-x_i)^k}\right]+...\frac{A_n}{x-x_n}.$$

+ Nếu $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x^2+px+q)...(x-x_n)$, trong đó phương trình $x^2+px+q=0$ vô nghiệm, ta giả sử phân tích được

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}+...\frac{A_n}{x-x_n}.$$

+ Nếu $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x^2+px+q)^k...(x-x_n)$, trong đó phương trình $x^2+px+q=0$ vô nghiệm, ta giả sử phân tích được

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\left[\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}\right]+...\frac{A_n}{x-x_n}.$$ Sau đó đồng nhất hai vế của các đẳng thức và so sánh hệ số hai vế ta suy các hệ số cần xác định ở tử thức mỗi phân thức đơn giản hoặc có thể thay các giá trị đặc biệt của x vào hai vế.

Cách nhớ phân tích là nếu mẫu là tam thức bậc hai thì tử thức có dạng $Bx+C$.

Một số khai triển nhanh(nên nhớ)

❖ $$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}.\frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right).$$

❖ $$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{1}{(a-b)^2}.\left[\frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)}\right]^2=\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}-\frac{2}{a-b}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)\right].$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I=\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Lời giải:

Ta có $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$ và $x^3-5x^2+6x=x\left(x-2\right)\left(x-3\right)$.

Giả sử $\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3},\forall x$

$\Leftrightarrow 5x^2-6x+1=A\left(x-2\right)\left(x-3\right)+Bx\left(x-3\right)+Cx\left(x-2\right),\forall x(*)$.

Thay $x=0$ vào (*) suy ra $1=6A\Rightarrow A=\frac{1}{6}$.

Thay $x=2$ vào (*) suy ra $9=-2B\Rightarrow B=-\frac{9}{2}$.

Thay $x=3$ vào (*) suy ra $28=3C\Rightarrow C=\frac{28}{3}$.

Vậy $I=\int\left(1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2\left(x-2\right)}+\frac{28}{3\left(x-3\right)}\right)dx$

$$=\int dx+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{28}{3}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=x+\frac{1}{6}\ln\left|x\right|-\frac{9}{2}\ln\left|x-2\right|+\frac{28}{3}\ln\left|x-3\right|+c.$$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int\frac{3x^2+3x+3}{\left(x+2\right)\left(x-1\right)^2}dx$.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giả sử $\dfrac{3x^2+3x+3}{(x+2)(x-1)^2}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2},\forall x$

$\Leftrightarrow 3x^2+3x+3=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2,\forall x(*)$

Thay $x=1$ vào (*) suy ra $9=3A\Rightarrow A=3$.

Thay $x=-2$ vào (*) suy ra $9=9C\Rightarrow C=1$.

Thay $x=0$ vào (*) suy ra $3=2A-2B+C\Rightarrow B=2$.

Vậy $I=\int\left(\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}\right)dx$

$$=3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{x-1}+2\ln|x-1|+\ln|x+2|+c.$$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^2-1}{x^4+1}dx.$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)$.

Giả sử $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1},\forall x$

$\Leftrightarrow x^2-1=(Ax+B)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right),\forall x$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow x^2-1=\left(A+C\right)x^3+\left(-A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D\right)x^2+\left(A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2}\right)x+B+D,\forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D=1 \\ A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2}=0 \\ B+D=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ B=-\dfrac{1}{2} \\ C=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ D=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $I=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)dx$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln\left|x^2-x\sqrt{2}+1\right|-\ln\left|x^2+x\sqrt{2}+1\right|\right)\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}$.

Lời giải:

Ta có $x\left(x^3+1\right)=x\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

Giả sử $\frac{1}{x\left(x^3+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1},\forall x$.

$\Leftrightarrow 1=A\left(x^3+1\right)+Bx\left(x^2-x+1\right)+\left(Cx+D\right)x\left(x+1\right),\forall x(*)$

Thay $x=0$ vào (*) suy ra $1=A\Rightarrow A=1$.

Thay $x=-1$ vào (*) suy ra $1=-3B\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$.

Đồng nhất hệ số của x^3,x^2 ở hai vế ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -B+C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-\dfrac{2}{3} \\ D=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $I=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx$

$$=\int\limits_1^2\frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\int\limits_1^2\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\limits_1^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\left(\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2-x+1\right|\right)\Bigg|_1^2=\frac{2}{3}\ln\frac{4}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{3x+1}{(x+1)(x+2)}dx$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{3x+1}{(x+1)^3}dx.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\frac{x^2+10}{x^3-2x^2+5x}dx.$

Bài 6.Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\frac{dx}{x^4+x^2+1}.$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{x^2+1}dx.$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int\limits_3^4\frac{3x^3}{x^2-3x+2}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx.$

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+x^3}.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3}.$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$

Bài 13. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1}dx.$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x}{(1+2x)^3}dx.$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CÓ MẪU SỐ LÀ ĐA THỨC

Xin đề cập dưới đây các bài toán kèm theo kỹ thuật biến đổi tương ứng với mỗi ví dụ. Những kỹ thuật biến đổi dưới đây rất tự nhiên và dễ hiểu.Vì vậy khi đọc kỹ các ví dụ này các bạn có thể nắm bắt được kỹ thuật và áp dụng vào các bài toán tương tự.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\int_0^2 \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}dx=\frac{1}{3}\int_0^2\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=\frac{1}{3}\left(\int_0^2\frac{dx}{x-1}-\int_0^2\frac{dx}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_0^2=-\ln 2.$$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^3\frac{dx}{(x+3)(x+6)(x+9)}$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^3\frac{dx}{(x+3)(x+6)(x+9)}=\frac{1}{6}\int_0^3\frac{(x+9)-(x+3)}{(x+3)(x+6)(x+9)}dx$

$$=\frac{1}{6}\left[\int_0^3\frac{dx}{(x+3)(x+6)}-\int_0^3\frac{dx}{(x+6)(x+9)}\right]=\frac{1}{18}\left[\int_0^3\frac{(x+6)-(x+3)}{(x+3)(x+6)}dx-\int_0^3\frac{(x+9)-(x+6)}{(x+6)(x+9)}dx\right]$$

$$=\frac{1}{18}\int_0^3\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+9}\right)dx=\frac{1}{18}\ln\left|\frac{(x+3)(x+9)}{(x+6)^2}\right|\Bigg|_0^3=\ln\frac{32}{27}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{(3x-5)^{10}}{(x+2)^{12}}dx$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^1\frac{(3x-5)^{10}}{(x+2)^{12}}dx=\int_0^1\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{10}\frac{dx}{(x+2)^2}$

$$=\frac{1}{11}\int_0^1\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{10}d\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)=\frac{1}{121}\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{11}\Bigg|_0^1$$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^1\frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx=\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}\frac{dx}{(2x+1)^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}d\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)=\frac{1}{900}\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}\Bigg|_0^1=\frac{2^{100}-1}{900}.$$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int\frac{dx}{(x+3)^5(x+5)^3}.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{dx}{(x+3)^5(x+5)^3}=\int\frac{dx}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5(x+5)^8}=\int\frac{1}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5}\cdot\frac{1}{(x+5)^6}\cdot\frac{dx}{(x+5)^2}$

$$=\frac{1}{2^7}\int\frac{1}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5}\cdot\left[\frac{(x+3)-(x+5)}{x+5}\right]^6 d\left(\frac{x+3}{x+5}\right)=\frac{1}{2^7}\int\frac{1}{t^5}(t-1)^6\,dt, t=\frac{x+3}{x+5}.$$

$$=\frac{1}{2^7}\int\frac{t^6-6t^5+15t^4-20t^3+15t^2-6t+1}{t^5}dt$$

$$=\frac{1}{2^7}\left(\frac{t^2}{2}-6t+15\ln|t|+\frac{20}{t}-\frac{15}{2t^2}+\frac{2}{t^3}-\frac{1}{4t^4}\right)+c.$$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int_1^3\frac{dx}{x^3-3x}.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^3\frac{dx}{x^3-3x}=\int_1^3\frac{dx}{x(x^2-3)}=\frac{1}{3}\int_1^3\frac{x^2-(x^2-3)}{x(x^2-3)}dx=\frac{1}{3}\left(\int_1^3\frac{xdx}{x^2-3}-\int_1^3\frac{dx}{x}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int_1^3\frac{d(x^2-3)}{x^2-3}-\int_1^3\frac{dx}{x}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln|x^2-3|-\ln|x|\right]\Bigg|_1^3=-\frac{1}{6}\ln 3.$$

Bài 7.Tính tích phân $I=\int\frac{dx}{x^9+3x^5}.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$I=\int\frac{dx}{x^9+3x^5}=I=\int\frac{dx}{x^5\left(x^4+3\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^4+3\right)-x^4}{x^5\left(x^4+3\right)}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dx}{x^5}-\int\frac{dx}{x\left(x^4+3\right)}\right)=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dx}{x^5}-\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^4+3\right)-x^4}{x\left(x^4+3\right)}dx\right)$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^5}-\frac{1}{9}\left[\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^3dx}{x^4+3}\right]=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^5}-\frac{1}{9}\left[\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^4+3\right)}{x^4+3}\right]$$

$$=-\frac{1}{12x^4}-\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+c.$$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$$=\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+c.$$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+c,t=x-\frac{1}{x}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4-5x^3-4x^2-5x+1}dx$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4-5x^3-4x^2-5x+1}dx=\int_1^2 \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-5x-4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}dx$

$$=\int_1^2 \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6}dx=\int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{t^2-5t-6}=\int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{(t-6)(t+1)}, t=x+\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{7}\int_2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{t-6}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{t-6}{t+1}\right|\Bigg|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{7}\ln\frac{4}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_{-1}^0 \frac{dx}{(2x+1)(2x+3)}$.

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+3)}$.

Bài 4. Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$.

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{(2x+1)^3}{(x+1)^5}dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 6. Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{(3x-2)^7 (3x+4)^3}$.

Bài 7. Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{(2x-1)^3 (3x-1)^4}$.

Bài 8. Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{x^3 + 5x}$.

Bài 9. Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{x^6 + 9x}$.

Bài 10. Tính tích phân $I = \int \frac{xdx}{x^8 + 3x^4 + 16}$.

Bài 11. Tính tích phân $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 2x + 1} dx$.

Bài 12. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$.

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^6 + 1}$.

Bài 14. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^4 - 3}{x\left(x^8 + 3x^4 + 2\right)} dx$

Bài 15. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{1 - x^4}{x\left(1 + x^4\right)} dx$

Bài 16. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3 - 1}{x\left(x^3 - 4\right)\left(x^4 - 4x + 1\right)} dx$

Bài 17. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1} dx$

Bài 18. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{1 - x^{2012}}{x\left(1 + x^{2012}\right)} dx$

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dạng tích phân: $I=\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, trong đó các số m,n,p là các số hữu tỉ.

Hướng giải quyết đầu tiên là đặt $t=a+bx^n$ hoặc $t=\left(a+bx^n\right)^p$.

Nếu cách đặt thứ nhất không hiệu quả chuyển sang cách đặt ẩn phụ thứ hai.

Đặt $t^k=\dfrac{a+bx^n}{x^n}$, k là số nguyên, thường là $k=1$.

Dạng toán này rất hay xuất hiện trong đề thi tuyển sinh đại học.

Dạng tích phân: $I=\int R\left(x,x^{\frac{r_1}{q_1}},\ldots,x^{\frac{r_i}{q_i}}\right)dx$, trong đó r_i,q_i là các số nguyên dương.

Tìm bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số $q_1,q_2,\ldots,q_i$ giả sử là k.

Khi đó ta đặt $x=t^k$.

Dạng tích phân: $I=\int R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ ta đặt $t=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{3\sqrt{3}}\dfrac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow t^2=1+\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow x^2=\left(t^2-1\right)^3\Rightarrow 2xdx=6t\left(t^2-1\right)^2dt$

Khi $x=0\Rightarrow t=1$; khi $x=3\sqrt{3}\Rightarrow t=2$.

Vậy $I=\int\limits_0^{3\sqrt{3}}\dfrac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=\int\limits_1^2\dfrac{3t\left(t^2-1\right)^2dt}{t}=3\int\limits_1^2\left(t^2-1\right)^2dt$

$$=3\int\limits_1^2\left(t^4-2t^2+1\right)dt=\left(\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t\right)\Bigg|_1^2=\frac{38}{5}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 2.Tính tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{7}}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}.$

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow x^2=9-t^2\Rightarrow 2xdx=2tdt$

Khi $x=\sqrt{7}\Rightarrow t=4;$ khi $x=4\Rightarrow t=5.$

Vậy $I=\int\limits_{\sqrt{7}}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}=\int\limits_{\sqrt{7}}^{4}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\int\limits_{4}^{5}\frac{tdt}{t\left(t^2-9\right)}=\int\limits_{4}^{5}\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Bigg|_4^5=\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx.$

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow x^2=t^3-1\Rightarrow 2xdx=3t^2dt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=1;$ khi $x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2.$

Vậy $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx=\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x^2.xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}=\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(t^3-1\right)t^2dt}{t}$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{2}\left(t^4-t\right)dt=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{2}t^2\right)\Bigg|_1^2=\frac{93}{10}.$$

Bài 4.Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}dx.$

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x^2=1-t^2\Rightarrow 2xdx=-2tdt.$

Khi $x=0\Rightarrow t=1;$ khi $x=1\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}dx=-\int\limits_{1}^{0}\left(1-t^2\right)t^2dt=\int\limits_{0}^{1}\left(t^2-t^4\right)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{15}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$

Lời giải:

Phân tích: Việc đặt $t=\sqrt{1+x^2}$ lúc này tỏ ra không hiệu quả, ta chuyển hướng sang cách đặt thứ hai.

Đặt $t=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\Rightarrow x^2=\frac{1}{t^2-1}\Rightarrow 2xdx=\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}.$

Khi $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=\sqrt{3}; x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Vậy $I=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{x^4.\frac{1+x^2}{x^2}.\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}$

$$=\int\limits_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^2.\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2}.t^2.t}=\int\limits_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}\Bigg|_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{\sqrt[3]{3}}\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}.$

Lời giải:

Đặt $t=\frac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x}\Rightarrow t^3=\frac{2-x^3}{x^3}\Rightarrow x^3=\frac{2}{t^3+1}\Rightarrow 3x^2dx=\frac{-6t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}.$

Khi $x=1\Rightarrow t=1; x=\sqrt[3]{3}\Rightarrow t=-1.$

Vậy $I=\int\limits_{1}^{\sqrt[3]{3}}\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}=\int\limits_{1}^{\sqrt[3]{3}}\frac{x^2dx}{x^6.\frac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x}}=\int\limits_{1}^{-1}\frac{1}{\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^2.t}.\frac{-2t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{-1}tdt=-\frac{t^2}{4}\Bigg|_{1}^{-1}=0.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4 \frac{dx}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$.

Khi $x=1 \Rightarrow t=1; x=4 \Rightarrow t=2$.

Vậy $I=\int\limits_1^4 \frac{dx}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}=\int\limits_1^2 \frac{2tdt}{t^2\left(t+1\right)}=2\int\limits_1^2 \frac{dt}{t\left(t+1\right)}=2\int\limits_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_1^2=2\ln\frac{4}{3}$.

Bài 8. Tính tích phân $I=\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Lời giải:

Đặt $t=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow t^2=\frac{1+x^2}{x^2} \Rightarrow x^2=\frac{1}{t^2-1} \Rightarrow 2xdx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$.

Vậy $I=\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{xdx}{x^6.\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2-1}\right)^3.t}.\frac{-tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=\int\left(1-t^2\right)dt=-\frac{t^3}{3}+t+c$.

$=-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$.

Bài 9. Tính tích phân $I=\int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x+4}+\sqrt{\left(x+4\right)^3}}$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x+4} \Rightarrow t^2=x+4 \Rightarrow 2tdt=dx$.

Khi $x=-3 \Rightarrow t=1; x=-1 \Rightarrow t=\sqrt{3}$.

Vậy $I=\int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x+4}+\sqrt{\left(x+4\right)^3}}=\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{t+t^3}=2\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}=2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 10. Tính tích phân $I=\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.\frac{1}{(2-x)^2}dx.$

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\Rightarrow t^3=\frac{2-x}{2+x}\Rightarrow x=\frac{4}{1+t^3}-2\Rightarrow dx=\frac{-12t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}.$

Vậy $I=\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.\frac{1}{(2-x)^2}dx=\int t.\frac{\left(1+t^3\right)^2}{16t^6}.\frac{-12t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8t^2}+c=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+c.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int\limits_4^6\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{dx}{x+2}.$

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}\Rightarrow t^2=\frac{x-4}{x+2}\Rightarrow x=\frac{6}{1-t^2}-2\Rightarrow dx=\frac{12tdt}{\left(1-t^2\right)^2}.$

Khi $x=4\Rightarrow t=0; x=6\Rightarrow t=\frac{1}{2}.$

Vậy $I=\int\limits_4^6\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{dx}{x+2}=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}t.\frac{1-t^2}{6}.\frac{12tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$

$$=2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}dt=2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt=2\left(\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-t\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=2\ln 3-1.$$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int\limits_2^3\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}.\frac{dx}{(x-1)^2}.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $t=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}\Rightarrow t^3=\dfrac{x-1}{x+1}\Rightarrow x=\dfrac{2}{1-t^3}-1\Rightarrow dx=\dfrac{6t^2dt}{\left(1-t^3\right)^2}$.

Khi $x=2\Rightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}};x=3\Rightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $I=\int\limits_2^3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}.\dfrac{dx}{(x-1)^2}=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}t^2.\dfrac{\left(1-t^3\right)^2}{4t^6}.\dfrac{6t^2dt}{\left(1-t^3\right)^2}=\dfrac{3}{2}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\dfrac{dt}{t^2}=-\dfrac{3}{2}t\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$.

Bài 13. Tính tích phân $I=\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow\dfrac{1}{t}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\Rightarrow 2\sqrt{x}=t-\dfrac{1}{t}\Rightarrow x=\left(\dfrac{t^2-1}{2t}\right)^2\Rightarrow dx=\dfrac{t^4-1}{2t^3}dt$.

Vậy $I=\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\int\dfrac{t^4-1}{2t^3(1+t)}dt=\dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t^3}\right)dt=\dfrac{1}{2}\left(t-\ln|t|-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}\right)+c$

$=\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+c.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{16}\dfrac{dx}{x\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^5dx$.

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Bài 4. Tính tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}dx.$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx.$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx.$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$

Bài 10. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int\limits_2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx.$

Bài 13. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{1+2x\sqrt{1+x^2}+2x^2}{1+x+\sqrt{1+x^2}}dx$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{2x^2-1+3\sqrt{x^2-1}}$

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Giả sử $u(x),v(x)$ là các hàm liên tục trên miền D, khi đó ta có

$$d(uv)=udv+vdu \Rightarrow \int d(uv)=\int udv+\int vdu \Leftrightarrow uv=\int udv+\int vdu$$

$$\Rightarrow \int udv=uv-\int vdu \Rightarrow \int\limits_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu(*)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Công thức (*) là công thức tích phân từng phần, các bài toán áp dụng cách tính này thường biểu thức dưới dấu tích phân là tích của hai biểu thức, trong đó một biểu thức là đạo hàm của một hàm số. Khi lấy tích phân từng phần thì tích phân sau phải đơn giản hơn tích phân đầu. Dưới đây trình bày một số dấu hiệu nhận biết để đặt u, dv sao cho thích hợp.Một các tổng quát là thành phần dv là đạo hàm của v nên chọn thành phần dv sao cho dễ tìm được v là được.

+ $I=\int P(x)\begin{bmatrix}\sin(ax+b)\\ \cos(ax+b)\\ e^{ax+b}\\ m^{ax+b}\end{bmatrix}dx$ thì đặt $\begin{cases}u=P(x)\\ dv=\begin{bmatrix}\sin(ax+b)\\ \cos(ax+b)\\ e^{ax+b}\\ m^{ax+b}\end{bmatrix}dx\end{cases}$.

+ $I=\int P(x)\begin{bmatrix}\ln(ax+b)\\ \log_c(ax+b)\end{bmatrix}dx$ thì đặt $\begin{cases}u=\begin{bmatrix}\ln(ax+b)\\ \log_c(ax+b)\end{bmatrix}\\ dv=P(x)dx\end{cases}$

+ $I=\int e^{ax+b}\begin{bmatrix}\sin(\alpha x+\beta)\\ \cos(\alpha x+\beta)\end{bmatrix}dx$ thì đặt $\begin{cases}u=e^{ax+b}\\ dv=\begin{bmatrix}\sin(\alpha x+\beta)\\ \cos(\alpha x+\beta)\end{bmatrix}dx\end{cases}$

+ $\int x^k\begin{bmatrix}\sin(\ln x)\\ \cos(\ln x)\\ \sin(\log_a x)\\ \cos(\log_a x)\end{bmatrix}dx$ thì đặt $\begin{cases}u=\begin{bmatrix}\sin(\ln x)\\ \cos(\ln x)\\ \sin(\log_a x)\\ \cos(\log_a x)\end{bmatrix}\\ dv=x^k dx\end{cases}$

ở đây $P(x)$ là đa thức.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.Tính tích phân $I=\int_1^3\frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx=3\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2}+\int\limits_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

+ $3\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2}=3\int\limits_1^3 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=\left.\frac{-3}{x+1}\right|_1^3=\frac{3}{4}$.

+ Tính tích phân $K=\int\limits_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{-1}{x+1} \end{cases}$

Vậy $K=\left.\frac{-\ln x}{x+1}\right|_1^3+\int\limits_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}=\frac{-\ln 3}{4}+\int\limits_1^3 \frac{(x+1)-x}{x(x+1)}dx=\frac{-\ln 3}{4}+\int\limits_1^3 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{-\ln 3}{4}+\ln\left.\left|\frac{x}{x+1}\right|\right|_1^3=\frac{1}{4}\ln\frac{27}{16}$.

Vậy $I=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{27}{16}$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{-1}{2x^2} \end{cases}$

Vậy $I=\left.\frac{-1}{2x^2}\ln x\right|_1^2+\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3}=\frac{-1}{8}\ln 2-\left.\frac{1}{4x^2}\right|_1^2=\frac{3-2\ln 2}{16}$.

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_1^e x^3\ln^2 xdx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x} dx \\ v = \dfrac{1}{4} x^4 \end{cases}$

Vậy $I = \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} e^4 - K.$

+ Tính $K = \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{4} x^4 \end{cases}$

Vậy $K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx \right) = \frac{1}{8} e^4 - \frac{1}{32} x^4 \Big|_1^e = \frac{1}{32} + \frac{3e^4}{32}$

Vậy $I = \frac{1}{4} e^4 - \left(\frac{1}{32} + \frac{3e^4}{32} \right) = \frac{5e^4 - 1}{32}.$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-2) e^{2x} dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = x - 2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$

Vậy $I = \frac{1}{2} e^{2x}(x-2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}\left(2 - e^2\right) - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{5 - 3e^2}{4}.$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_2^3 \ln\left(x^2 - x\right) dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2 - x\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x-1}{x^2 - x} \\ v = x \end{cases}$

Vậy $I = x\ln\left(x^2 - x\right)\Big|_2^3 - \int_2^3 \dfrac{x(2x-1)}{x^2 - x}dx = 3\ln 6 - 2\ln 2 - \int_2^3 \dfrac{2x-1}{x-1}dx = \ln 54 - \int_2^3 \dfrac{2(x-1)+1}{x-1}dx$

$= \ln 54 - 2\int_2^3 dx - \int_2^3 \dfrac{dx}{x-1} = \ln 54 - 2x\Big|_2^3 - \ln|x-1|\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 2.$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{x^2}.2xdx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{x^2} d(x^2) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 te^t dt$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^1 td(e^t) = \dfrac{1}{2}te^t\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2}e^t\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}.$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_0^2 \dfrac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = x^2 e^x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = xe^x(x+2)dx \\ v = \dfrac{-1}{x+2} \end{cases}$

Vậy $I = \dfrac{-x^2 e^x}{x+2}\Big|_0^2 + \int_0^2 xe^x dx = -e^2 + \int_0^2 xd\left(e^x\right) = -e^2 + xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = e^2 - e^x\Big|_0^2 = 1.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 xdx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx=K-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=K-\frac{\pi^2}{32}.$

+ Tính $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} xd\left(\tan x\right)=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\sin x\right)}{\cos x}=\frac{\pi}{4}+\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Vậy $I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}.$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{x^7dx}{\left(1+x^4\right)^2}.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=x^4 \\ dv=\dfrac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=4x^3dx \\ v=\dfrac{-1}{4\left(x^4+1\right)} \end{cases}$

Vậy $I=\frac{-x^4}{4\left(1+x^4\right)}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x^3dx}{1+x^4}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{d\left(1+x^4\right)}{1+x^4}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\ln\left|1+x^4\right|\Big|_0^1=\frac{2\ln 2-1}{8}.$

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_1^e\left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln xdx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^e\left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln xdx=2\int_1^e x\ln xdx-3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=M-N.$

+ Tính $M=2\int_1^e x\ln xdx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=\dfrac{1}{2}x^2\end{cases}$

Vậy $M=2\left(\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx\right)=2\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e\right)=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}.$

+ Tính $N=3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=3\int_1^e\ln xd\left(\ln x\right)=\frac{3}{2}\left(\ln x\right)^2\Big|_1^e=\frac{3}{2}.$

Vậy $I=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{e^2}{2}-1.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos xdx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}d(\sin x)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2x}{2}dx$

$=\int_0^1 e^tdt+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=e^t\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}=e+\frac{\pi}{4}-1.$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}x\sin x\cos^2 xdx.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\cos^2 xdx=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} xd\left(\cos^3 x\right)=-\frac{1}{3}x\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^3 xdx$

$=\frac{-\pi\sqrt{3}}{48}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)=\frac{-\pi\sqrt{3}}{48}+\frac{1}{3}\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{11\pi}{72}-\frac{-\pi\sqrt{3}}{48}.$

Bài 13. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 xdx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$

$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\left(\sin 2x\right)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\left(x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx\right)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}.$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)dx=I=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx-\int_e^{e^2}\frac{dx}{\ln x}=M-N.$

+ Tính $M=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx=-\int_e^{e^2} xd\left(\frac{1}{\ln x}\right)=-\frac{x}{\ln x}\Big|_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\frac{dx}{\ln x}=e-\frac{e^2}{2}+N.$

Vậy $I=M-N=e-\frac{e^2}{2}.$

Bài 15. Tính tích phân $I=\int_1^e\left(x\ln x\right)^2 dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^e (x\ln x)^2\,dx=\frac{1}{3}\int_1^e (\ln x)^2\,d\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\left[x^3(\ln x)^2\Big|_1^e-\int_1^e x^3 d\left((\ln x)^2\right)\right]$

$=\frac{1}{3}\left[e^3-2\int_1^e x^2\ln x dx\right]=\frac{1}{3}\left[e^3-\frac{2}{3}\int_1^e \ln x d\left(x^3\right)\right]=\frac{1}{3}\left[e^3-\frac{2}{3}\left(x^3\ln x\Big|_1^e-3\int_1^e x^2 dx\right)\right]=\frac{5e^3-2}{27}.$

Bài 16. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx \\ v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Vậy $I=\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx$

$=\frac{1}{8}\ln 3-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^2 dx=\frac{1}{8}\ln 3-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx$

$=\frac{1}{8}\ln 3-\left[x-2\ln|1+x|-\frac{1}{x+1}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}\ln 3+2\ln\frac{3}{2}-\frac{5}{6}.$

Bài 17. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}d(e^x)=e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

$=2e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$.

+ Tính tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(e^x)}{1+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=e^x\frac{1}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$

$=e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}$.

Vậy $I=2e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}-\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$.

Bài 18. Tính tích phân $I=\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ v=x \end{cases}$

Vậy $I=\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1 d\left(\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}+1.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 19. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ v=\sqrt{1+x^2} \end{cases}$

Vậy $I=\int_0^1 \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1 dx=\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-1.$

Bài 20. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin xdx}{1+\cos x}=-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(1+\cos x\right)}{1+\cos x}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$=-\ln\left|1+\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} xd\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\ln\frac{4}{2+\sqrt{2}}+x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\frac{x}{2}dx$

$=\ln\frac{4}{2+\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{8}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-1\right).$

Bài 21. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x\ln\left(1+3x\right)}{3^{3x}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $\int \frac{x\ln(1+3x)}{3^{3x}}dx = \int x\ln(1+3x)d\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\int e^{-3x}d\left(x\ln(1+3x)\right)$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\left(\ln(1+3x) + \frac{3x}{1+3x}\right)dx$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\int \ln(1+3x)d\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + \int e^{-3x}\frac{x}{1+3x}dx$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\ln(1+3x) + \int e^{-3x}d\ln(1+3x)\right] + \int e^{-3x}\frac{x}{1+3x}dx$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + -\frac{1}{9}e^{-3x}\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\frac{1}{1+3x}dx + \int e^{-3x}\frac{x}{1+3x}dx$

$= -\frac{1}{9}e^{-3x}(1+3x)\ln(1+3x) + \int e^{-3x}\left(\frac{1}{3(1+3x)} + \frac{x}{1+3x}\right)dx$

$= -\frac{1}{9}e^{-3x}(1+3x)\ln(1+3x) + \int d\left(-\frac{1}{9}e^{-3x}\right)$

$= -\frac{1}{9}e^{-3x}(1+3x)\ln(1+3x) - \frac{1}{9}e^{-3x} + C = -\frac{(1+3x)\ln(1+3x)+1}{9e^{3x}} + C$

Vậy $I = -\frac{(1+3x)\ln(1+3x)+1}{9e^{3x}}\Bigg|_0^1 = \frac{-4\ln 4 + 1 + e^3}{9e^3}$

Bài 22. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}dx$.

Lời giải:

Ta có $I = -\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right]\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{1+x}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$= -\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{1+x}dx$$

Ta có $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = -\dfrac{x}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}$

Vậy $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{1+x}dx = \int_0^1 \left[-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x+1)}\right]dx$

$$= \left[-\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

Vậy $I = -\dfrac{\ln 2}{8} + \dfrac{\pi}{16}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x dx$.

Bài 2. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}(1+\sin 2x)dx$.

Bài 3. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin 2x dx$.

Bài 4. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx$.

Bài 5. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(e^{x^2}\sin x + x^3 e^x\right)dx$.

Bài 6. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin^2 x dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} \sin^2 x dx.$

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x} dx.$

Bài 9.Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x\cos\sqrt{x} dx.$

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_1^2 x^2 \ln x dx.$

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2} dx.$

Bài 12.Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2 dx}{(x\sin x+\cos x)^2}.$

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^1 e^x \sin^2(\pi x) dx.$

Bài 14.Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^x \cos x dx.$

Bài 15. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 e^x \cos^2 x dx.$

Bài 16. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\cos x+(x-2)\sin x}{x\cos x-\sin x} dx.$

Bài 17. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x} dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 18. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(1-\cos x\right)dx.$

Bài 19. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 xdx.$

Bài 20. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\sin^3 x}.$

Bài 21. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{e^x}dx.$

Bài 22. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos^4\left(\sin x\right)dx.$

Bài 23. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\ln\left(\tan x\right)dx.$

Bài 24. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{e^{\pi}}\cos\left(\ln x\right)dx.$

Bài 25. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{e^{\pi}}\cos^2\left(\ln x\right)dx.$

Bài 26. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^2}dx.$

Bài 27. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{\left(x+1\right)^2}dx.$

Bài 28. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx.$

Bài 29. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{e}\left(\ln^2 x-\ln x\right)dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 30. Tính tích phân $I=\int_1^e \left(x^2-x\right)\ln x dx.$

Bài 31. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx.$

Bài 32. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(x-\frac{1}{x^3}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

Bài 33. Tính tích phân $I=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx.$

Bài 34. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}dx.$

Bài 35. Tính tích phân $I=\int_0^1 x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

Bài 36. Tính tích phân $I=\int_{-3}^0 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)\sqrt{1-x}}dx.$

Bài 37.Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx.$

Bài 38. Tính tích phân $I=\int_2^e \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx.$

Bài 39. Tính tích phân $I=\int_2^3 \frac{x-1}{(x+1)^3}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx.$

Bài 40. Tính tích phân $I=\int_2^3 \frac{1}{(x+1)^3}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx.$

Bài 41. Tính tích phân $I=\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^4}dx.$

Bài 42.Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x\tan\frac{x}{2}+x^2\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\right)dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 43. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}dx.$

Bài 44. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}(1+x\cos x)dx.$

Bài 45. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}x\sin x\cos^2 xdx.$

Bài 46. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{1+\sin 2x}.$

Bài 47. Tính tích phân $I=\int_2^{5}\frac{\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-1+\sqrt{x-1}}dx.$

Bài 48. Tính tích phân $I=\int_3^{8}\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx.$

Bài 49. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2 x(1+\tan x)}.$

Bài 50. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}x\left(\cos x+\sin^5 x\right)dx.$

Bài 51. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1+\cos x)e^x}dx.$

Bài 52. Tính tích phân $I=\int_1^{e}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+\ln^2 x\right)dx.$

Bài 53. Tính tích phân $I=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}+x\left(\frac{x}{\cos x}+2\tan x\right)\right)dx.$

Bài 54. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{x}{2}+x\cos x\right)e^{\sin x}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 55. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{e^x+1}dx.$

Bài 56. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{x^2\ln x + 2x^2 + 2}{x}\right)\ln^3 x dx.$

Bài 57. Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x-1)\ln\left(x^3+1\right)dx.$

Bài 58. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}dx.$

Bài 59. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)}dx.$

Bài 60. Tính tích phân $I = \int \quad I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^8 dx}{\left(x^4-1\right)^2}.$

Bài 61. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\left(2\cot^2 x + 3\cot x + 1\right)}{\sin^3 x} e^{\frac{1}{\sin^2 x}+\cot x} dx.$

Bài 62. Tính tích phân $I = \int_1^2 x\left(1-\frac{1}{x^4}\right)\left(\ln\left(x^2+1\right) - \ln x\right)dx$.

Bài 63. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{(17-\cos 4x)^x}{\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{\pi}{2}}}dx$

Bài 64. Tính tích phân $I = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^2 x - \tan x\right)e^{-x}dx$

Bài 65. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 66. Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\ln^2 x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}dx$.

Bài 67. Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\log_2{}^3 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx$.

Bài 68. Tính tích phân $I=\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx$

Bài 69. Tính tích phân $I=\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}-2x\ln(1+x)\right)dx$

Bài 70. Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{xe^x+1}{x(e^x+\ln x)}dx$

Bài 71. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\left(2x+\frac{e^x}{1+\tan^2 x}\right)dx$

Bài 72. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{2x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}dx$

Bài 73. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\tan^4 x-1\right)\tan 2x dx$

Bài 74. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{x+\tan x}{x-\tan x}+\left(\frac{x\tan x}{x-\tan x}\right)^2\right)dx$

Bài 75. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+x-\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} dx$

Bài 76. Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{1-\ln x}{x(x+\ln x)}dx$

Bài 77. Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-3\ln^2 x}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 78. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Bài 79. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{0} x\left(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}\right) dx$

Bài 80. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \ln\left(x^2 + x + 1\right) dx$

Bài 81. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{x^3+1}{x}\right) \ln x dx$

Bài 82. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) dx$

Bài 83. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x+1)^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

Bài 84. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$

Bài 85. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1-\sin x}{(1+\cos x)e^x} dx$

Bài 86. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{(1+\cos x)^{1+\cos x}}{1+\sin x}\right) dx$

Bài 87. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x^3 \ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Bài 88. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 1 + \left(x^3 + x\ln x + 2\right)\ln x}{1 + x\ln x} dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 89. Tính tích phân $I=\int\limits_1^e \frac{\left(x^2+x+1\right)\ln x}{x\left(x+1\right)^2}dx$

Bài 90. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4 \frac{\ln\left(5-x\right)+x^3\sqrt{5-x}}{x^2}dx$

Bài 91. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 \left(\frac{x^3-1}{x}+\frac{3x^2+e^x+1}{e^x+x^3+x}\right)dx$

Bài 92. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{x^2dx}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}$

Bài 93. Tính tích phân $I=\int\limits_1^e \frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx$

Bài 94. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x^3\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)dx$

Bài 95. Tính tích phân $I=\int\limits_1^e \frac{\left(2+x\ln x\right)\left(1+\ln x\right)}{1+x\ln x}dx$

Bài 96. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{e^3} \frac{2\ln x+1}{x\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)}dx$

Bài 97. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{xe^x\left(4+4\left(\sin x+\cos x\right)+\sin 2x\right)}{\left(1+\cos x\right)^2}dx$

Bài 98. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi} \frac{x^2\cos^2 x-x\sin x-\cos x-1}{\left(1+x\sin x\right)^2}dx$

Bài 99. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+7x-x\cos 2x}{2\left(2+\cos x\right)}dx$

Bài 100. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 101. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x}{1-x^4} \ln\left(\frac{3-x^2}{2}\right) dx$

Bài 102. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\left(2x + \frac{e^x}{1+\tan^2 x}\right) dx$

Bài 103. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+\sin x)\cos^2 x}$

Bài 104. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(4x - \frac{3}{x} + 2\right) e^{2\left(x+\frac{3}{4x}\right)} dx$

Bài 105. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{t\ln(1+t)}{e^t} dt$

Bài 106. Tính tích phân $I = \int_1^e \ln^3 x\left(\frac{x^2 \ln x + 2x^2 + 2}{x}\right) dx$

Bài 107. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+x^{2+\sqrt{3}}\right)}{1+x} dx$

Bài 108. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\ln(\cos x)\sin 2x dx$

Bài 109. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\cos x) dx$

Bài 110. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2} dx$

Bài 111. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2\left(1+(\ln x)^2\right)\sqrt{1+(\ln x)^2}}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}} dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VỚI HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dưới đây xin trình bày những lưu ý tổng quát nhất khi giải quyết tích phân hàm lượng giác.

Khi thực hiện phép tính tích phân với các hàm số lượng giác, trong biểu thức tích phân có thể xuất hiện

+ $\sin xdx = -d\left(\cos x\right) \Rightarrow$ ta đặt $t = \cos x$ lúc này biến đổi biểu thức trong dấu tích phân thành $\int f(\cos x)d\left(\cos x\right) = \int f(t)dt.$

+ $\cos xdx = d\left(\sin x\right) \Rightarrow$ ta đặt $t = \sin x$ lúc này biến đổi biểu thức trong dấu tích phân thành $\int f(\sin x)d\left(\sin x\right) = \int f(t)dt.$

+ $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\tan x\right) \Rightarrow$ ta đặt $t = \tan x$ lúc này biến đổi biểu thức trong dấu tích phân thành $\int f(\tan x)d\left(\tan x\right) = \int f(t)dt.$

+ $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\cot x\right) \Rightarrow$ ta đặt $t = \cot x$ lúc này biến đổi biểu thức trong dấu tích phân thành $\int f(\cot x)d\left(\cot x\right) = \int f(t)dt.$

<u>Lưu ý:</u>

$$\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + c.$$

$$\int \cot xdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + c.$$

Một lưu ý nữa là nếu biểu thức lượng giác có dạng phân thức thì luôn nghĩ tới tử thức sẽ chứa mẫu thức và đạo hàm của mẫu thức.

Phương pháp chủ đạo tính tích phân hàm lượng giác là đổi biến số.

BÀI TẬP MẪU

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 1.Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\cos 2xdx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2x\right)\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2xdx$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}.$$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3x-1\right)\cos^2xdx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3x-1\right)\cos^2xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5xdx-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=M-N.$

+ Tính $M=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2x\right)^2d\left(\sin x\right)$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=d\left(\sin x\right)$. Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

Vậy $M=\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)^2dt=\int\limits_0^1\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{15}.$

+ Tính $N=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$

Vậy $I=M-N=\frac{8}{15}-\frac{\pi}{4}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx$

Đặt $t=1+\sin 2x\Rightarrow dt=2\cos 2xdx$. Khi $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=2.$

Vậy $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln 2.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^3 xdx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^3 xdx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)}{\cos^3 x}$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=d\left(\cos x\right)$. Khi $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}; x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}.$

Vậy $I=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}}\frac{t^2-1}{t^3}dx=\left(\ln|t|+\frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\ln 2.$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^4 x}=-\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\cos x\right)}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}.$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=d\left(\cos x\right)$. Khi $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-t+1+t}{(1-t)(1+t)}\right)^2 dt$

$=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3.$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\left(2\cos x+1\right)}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow 2tdt=-3\sin xdx$

Khi $x=0\Rightarrow t=2;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

Vậy $I=\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{4t^2}{9}+\frac{2}{9}\right)dt=\left(\frac{4}{27}t^3+\frac{2}{9}t\right)\Bigg|_1^2=\frac{34}{27}.$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx.$

Lời giải:

Ta có $d\left(\cos^2 x+4\sin^2 x\right)=-2\sin x\cos x+8\cos x\sin x=6\sin x\cos x=3\sin 2x.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy đặt $t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}\Rightarrow t^2=\cos^2 x+4\sin^2 x\Rightarrow 2tdt=3\sin 2xdx$

Khi $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2.$

Vậy $I=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{tdt}{t}=\frac{2}{3}\int_1^2 dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\left(1-\cos x\right)\sin xdx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$

$=\left(-4\cos x+\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x}\cot xdx.$

Lời giải:

$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x}\cot xdx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{\sin^2 x}}.\frac{\cot x}{\sin^2 x}dx$

Đặt $t=\cot x\Rightarrow dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}$. Khi $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=-\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}\sqrt[3]{-t^2}.tdt=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}t^{\frac{5}{3}}dt=\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}=-\frac{1}{8\sqrt{3}}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\sin x\cos^5 xdx.$

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\Rightarrow t^6=1-\cos^3 x\Rightarrow 6t^5dt=3\cos^2 x\sin xdx$

Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

Vậy $I=2\int_0^1 t\left(1-t^6\right)t^5dt=2\int_0^1\left(t^6-t^{12}\right)dt=2\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{13}t^{13}\right)\Big|_0^1=\frac{12}{91}.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\sin^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\left(\sin^4 x-2\sin^2 x+1\right)}{\sin^4 x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 xdx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 x\frac{dx}{\sin^2 x}$

$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2x\right)dx-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 xd\left(\cot^2 x\right)$

$=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)-2\left(-\cot x-x\right)-\frac{\cot^3 x}{3}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5\pi}{8}-\frac{23}{12}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 12. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x} dx$.

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x} dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \sin x}{1+\cos x} dx$.

Đặt $t = 1+\cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 2; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$

Vậy $I = -2\int_2^1 \frac{(t-1)^2}{t} dt = 2\int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t^2}\right) dt = 2\left(\frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right)} dx$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^4}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-\left(1-t^4\right)}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1-t^2} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(1+t^2\right) dt$

$= \left[-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \left(t + \frac{1}{3}t^2\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{10}{9\sqrt{3}}.$

Bài 14. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+1\right)d\left(\tan x\right)=\left(\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}.$

Bài 15. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{\left(\sin x+\cos x\right)^4}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{\left(\sin x+\cos x\right)^4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\left(1+\sin 2x\right)^2}dx$

Đặt $t=1+\sin 2x\Rightarrow dt=2\cos 2xdx$. Khi $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=2.$

Vậy $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln 2.$

Bài 16. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)d\left(\tan x\right)$

$=\left(\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{15}.$

Bài 17. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t \Rightarrow dx=-dt$. Khi $x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}; x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=0.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan x\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan t\right)dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-I \Rightarrow 2I=\frac{\pi}{4}\ln 2 \Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

Bài 18. Tính tích phân $I=\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}.$

Lời giải:

Ta có $I=\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}=\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\int \frac{d\left(\sin x\right)}{\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)}=\int \frac{dt}{t^4\left(1-t^2\right)}$

$=\int \frac{\left(1-t^4\right)+t^4}{t^4\left(1-t^2\right)}dt=\int \frac{1+t^2}{t^4}dt-\int \frac{dt}{t^2-1}=-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$

$=-\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+c$

Bài 19. Tính tích phân $I=\int \frac{\tan^2 x}{\cos x}dx.$

Lời giải:

$I=\int \frac{\tan^2 x}{\cos x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\cos x dx=\int \frac{\sin^2 x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}d\left(\sin x\right)=\int \left(\frac{t}{1-t^2}\right)^2 dt$

$=\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)^2 dt=\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{\left(1-t\right)^2}-\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{\left(1+t\right)^2}\right)dt$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=\frac{1}{4(1-t)}-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=\frac{1}{4(1-\sin x)}-\frac{1}{4(1+\sin x)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c.$$

Bài 20. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x+\sin^2 x+\sin x+1\right)}{\sin^6 x-1}dx$

Lời giải :

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin^6 x-1}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x+\sin^2 x+1\right)}{\sin^6 x-1}dx$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\sin^3 x\right)}{\left(\sin^3 x\right)^2-1}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{\sin^2 x-1}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\left(1+\cos^3 x\right)dx.$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x-1\right)\sin^2 xdx.$

Bài 3.tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 xdx.$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^6 xdx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

Bài 9.Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3} + \tan x}{\sqrt{3} - \tan x} dx$.

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan x} dx$.

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 8\cos x}} dx$.

Bài 12. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}$.

Bài 14. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1 + \sin 2x}$.

Bài 15. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 16. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2xdx}{\left(3\sin^2 x+4\cos^2 x\right)^3}$.

Bài 17. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^3 xdx}{3\sin 4x-\sin 6x-3\sin 2x}$.

Bài 18. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx$.

Bài 19. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Bài 20. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x+3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}dx$

Bài 21. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{7\sin x-5\cos x}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}dx$

Bài 22. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$

Bài 23. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}dx$

Bài 24. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\sin xdx}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}$

Bài 25. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin x}-\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos x}\right)dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 26. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{1+\cos x}dx$

Bài 27. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3x}{\left(2\sin x+1\right)^4}dx$

Bài 28. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2xdx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$

Bài 29. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^9 x}{\sin x\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)}dx$

Bài 30. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x+\sin^2 x+\sin x+1\right)}{\sin^6 x-1}dx$

Bài 31. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos x\left(\sin x+1\right)}{\sin^6 x-1}dx$

Bài 32. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x+\cos 2x}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx$

Bài 33. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\tan\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}dx$

Bài 34. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\cos^2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}dx$

Bài 35. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\left(1+\cos x\right)^2dx$

Bài 36. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 37. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \sin x} dx$

Bài 38. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x + 4\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$

Bài 39. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx$

Bài 40. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{1 + \cos x} dx$

Bài 41. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2\cos x \cos \frac{x}{2}} dx$

Bài 42. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x - \sin^3 3x}{1 + \cos 3x} dx$

Bài 43. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin 2x + \sin x}{\sqrt{6\cos x - 2}} dx$

Bài 44. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \left(1 + \sin^2 x\right)^3 dx$

Bài 45. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x \left(\tan^2 x - 2\tan x + 5\right)} dx$

Bài 46. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x \sqrt{\cos^2 x + 2}} dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 47. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^2}$

Bài 48. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} dx$

Bài 49. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx$

Bài 50. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$

Bài 51. Tính tích phân $I = \int_0^{1} \frac{x + 1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$

Bài 52. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x (\sin x + \cos x + 1)}{(1 + \cos x)^2} dx$

Bài 53. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \ln(\tan x) dx$

Bài 54. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x} \sin x}{\cos^3 x} dx$

Bài 55. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4\frac{\sin x}{\cos^3 x} - x^2 \sin^3 x \right) dx$

Bài 56. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \cos x) dx$

Bài 57. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2}\, dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 58. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{10} x + \cos^{10} x - \sin^4 x \cos^4 x\right) dx$

Bài 59. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln\left(\cos x\right)}{\cos^2 x} dx$

Bài 60. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1+\sin^2 x}\, dx$

DẠNG TOÁN BỔ SUNG

Nếu tích phân có dạng $I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{m\sin x + n\cos x} dx$

Lúc này nghĩ tới việc biểu diễn tử thức theo mẫu thức và đạo hàm của mẫu thức

<u>Trình bày:</u>

Giả sử $a\sin x + b\cos x = \alpha\left(m\sin x + n\cos x\right) + \beta\left(m\cos x - n\sin x\right)$

$\Leftrightarrow a\sin x + b\cos x = \left(\alpha m - \beta n\right)\sin x + \left(\alpha n + \beta m\right)\cos x$

Đồng nhất hệ số ta được

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha m - \beta n \\ b = \alpha n + \beta m \end{cases}$ giải hệ này suy ra các hệ số α, β.

Khi đó

$$I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{m\sin x + n\cos x} dx = \int \frac{\alpha\left(m\sin x + n\cos x\right) + \beta\left(m\cos x - n\sin x\right)}{m\sin x + n\cos x} dx$$

$$= \alpha\int dx + \beta\int \frac{d\left(m\sin x + n\cos x\right)}{m\sin x + n\cos x} = \alpha x + \beta\ln\left|m\sin x + n\cos x\right| + c.$$

Một lưu ý là các số a, b, m, n có thể là các số thực tự do hoặc cũng có thể chứa x.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Chẳng hạn: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\cos x + (x-2)\sin x}{x\cos x - \sin x}dx.$

Một dạng tương tự

$$I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{(m\sin x + n\cos x + k)^2}dx.$$

$$I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{\sqrt{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}}dx(*)$$

Với dạng (*) các đề tuyển sinh hay bắt gặp dưới dạng này

Lúc này ta phải nhóm biểu thức trong căn

Trình bày:

Nhóm được $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = \alpha(m\sin x + n\cos x)^2 + \beta(**)$

Và tiến hành phân tích

$$a\sin x + b\cos x = k(m\sin x + n\cos x) + l(m\cos x - n\sin x)(***)$$

Lưu ý cách nhóm ở (**) không phải là duy nhất, do đó ta có thể làm bài toán dạng này tương đối dễ.

Đề bài cũng cho dễ nhìn, vì vậy mà cách phân tích ở (***) có thể nhận thấy ngay mà không cần đồng nhất hệ số như trên.

Nếu tích phân có dạng

$$I = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt[n]{(a\sin^2 x + b\cos^2 x)}}dx$$

Lúc này tử thức biểu diễn theo đạo hàm của $a\sin^2 x + b\cos^2 x$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x + (x+1)\cos x}{x\sin x + \cos x}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $x\sin x+(x+1)\cos x=(x\sin x+\cos x)+x\cos x=(x\sin x+\cos x)+(x\sin x+\cos x)'$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(x\sin x+\cos x)+x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}+\ln|x\sin x+\cos x|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}.$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x+2(\sin x+\cos x)+1}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)+1}dx=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x+1)^2}$

$=\frac{-1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x+1)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4}.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}.$

Lời giải:

Ta có $d(\cos^2 x+4\sin^2 x)=-2\cos x\sin x+8\sin x\cos x=6\sin x\cos x=3\sin 2x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{\cos^2x+4\sin^2x}}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\cos^2x+4\sin^2x\right)}{\sqrt{\cos^2x+4\sin^2x}}=\frac{2}{3}\sqrt{\cos^2x+4\sin^2x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{10}-2\right).$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx.$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\left(\sin x+\cos x\right)^2-1}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\cos x+\sin x\right)}{\sqrt{\left(\sin x+\cos x\right)^2-1}}$

Đặt $t=\cos x+\sin x\Rightarrow dt=d\left(\cos x+\sin x\right)$.

Khi $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sqrt{2};x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Vậy $I=\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}d\left(\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\right)=\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt[4]{24}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}\right).$

`

TÍCH PHÂN CỦA HÀM TUẦN HOÀN

<u>Xét bài toán sau:</u> Nếu $f(x)$ liên tục tuần hoàn với chu kì T, với mọi $a\in\mathbb{R}$ ta có

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^Tf(x)dx=\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx$$

<u>Chứng minh:</u>

Ta có $I=\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0f(x)dx+\int_0^Tf(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx(1)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $x = t + T \Rightarrow \int\limits_T^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^a f(t+T)dt = \int\limits_0^a f(t)dt = \int\limits_0^a f(x)dx = -\int\limits_a^0 f(x)dx(2)$

Lấy (1) cộng với (2) theo vế suy ra đpcm.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{2012\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx.$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1-\cos 2x}$ liên tục và tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ với chu kì $T = \pi$ nên ta có:

$$\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{0+\pi}^{\pi+\pi} f(x)dx = \int\limits_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx = \ldots \int\limits_{2011\pi}^{2012\pi} f(x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2012\pi} f(x)dx = \int\limits_0^{\pi} f(x)dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(x)dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{2011\pi}^{2012\pi} f(x)dx = 2012\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$$

$$= 2012\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = 2012\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} |\sin x|dx = 2012\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sin xdx = -2012\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 4024\sqrt{2}.$$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx$

TÍCH PHÂN LIÊN KẾT

Xét tích phân $I_1 = \int \frac{F(x)}{\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)^n}dx.$, trong đó α, β là các số thực tự do, n là số nguyên dương; $F(x), G(x)$ là các hàm số lượng giác.

Việc tính trực tiếp tích phân I_1 tỏ ra khó khăn, khi đó ta sẽ gián tiếp tính I_1 thông qua tích phân $I_2 = \int \frac{G(x)}{\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)^n}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \alpha I_1 + \beta I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)^{n-1}} (*) \\ kI_1 + lI_2 = \displaystyle\int \frac{kF(x) + lG(x)}{\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)^{n}} dx (**) \end{cases} (1)$$

Các hệ số k, l được chọn sao cho $kF(x) + lG(x)$ là đạo hàm của $\alpha F(x) + \beta G(x)$.

Trong đó tích phân (*) và (**) tính đơn giản hơn, khi đó giải hệ (1) suy ra I_1, I_2.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.Tính tích phân $I = \int \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

Lời giải:

Xét tích phân $K = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

Ta có $I + K = \int \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int dx = x + c_1 (1)$

$$I - K = \int \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} dx$$

$$= \int \frac{2\cos 2x dx}{\sin^2 2x - 2} = \int \frac{d\left(\sin 2x\right)}{\sin^2 2x - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}} \right| + c_2 (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}} \right| + \frac{x}{2} + c$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Xét tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx$

Ta có $I+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{4}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1)$

$$K-\sqrt{3}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}=-\frac{1}{2\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}-3}{6}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I=\frac{\sqrt{3}+1}{6}.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{100}x}{\sin^{100}x+cos^{100}x}dx.$

Lời giải:

Xét tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^{100}x}{\sin^{100}x+cos^{100}x}dx$

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Khi $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{100}x}{\sin^{100}x+cos^{100}x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-\sin^{100}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{100}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos^{100}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{100}t}{\sin^{100}t+cos^{100}t}dt=K.$

Mặt khác ta có

$$I+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $I = K = \dfrac{\pi}{4}.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x dx}{\left(\sin x + \cos x\right)^3}.$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx.$

Bài 3. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos^2 dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}.$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx.$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ KHÔNG LÀM THAY ĐỔI CẬN

Dưới đây xin trình bày kỹ thuật đổi biến số không làm thay đổi cận tích phân với một số bài toán tích phân hàm lượng giác cũng như tích phân các hàm số khác khi mà ta khó áp dụng cách tính tích phân thông thường.

Đảm bảo khi đọc phương pháp này các bạn sẽ không cần phải để ý tới các dạng tích phân đặc biệt!

Xét tích phân $I = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Khi đó ta sẽ đổi biến số bằng cách đặt $x = a + b - t$ thì ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} dx = -dt \\ x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$$

Lúc này cận mới của tích phân là $-\int_b^a f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt$

Vẫn là từ a đến b không thay đổi.

BÀI TẬP MẪU

Ta xét bài toán quen thuộc sau

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan x\right)dx$ (1)

Thông thường ta nghĩ đến các hướng

Hướng 1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin x+\cos x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos x\right)dx.$

Hướng 2. Dùng tích phân từng phần $\begin{cases} u = \ln\left(1+\tan x\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\cos^2 x\left(1+\tan x\right)}dx \\ v = x \end{cases}$

Suy ra $I = x\ln\left(1+\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x\left(1+\tan x\right)}$

Cả hai hướng này nhận thấy khó hiệu quả.

Ta giải quyết bài toán này bằng cách đổi biến số không làm thay đổi cận như sau

<u>Lời giải:</u>

Đặt $x = \left(\frac{\pi}{4}+0\right) - t = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan t\right)dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

Rất đơn giản phải không nào!

Nhưng từ hướng 2 và cách giải này ta có bài toán tương đối hay sau

+ Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2x\left(1+\tan x\right)}$ (*)

Và một bài được suy ra từ (1)

Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{\ln\left(1+x\right)}{1+x^2}dx$. Nếu đặt $x=\tan t$ thì đưa về tích phân (1)

Các bạn thử giải quyết bài toán sau:

Liệu tính được tích phân $I=\int_0^1\frac{\ln\left(1+ax\right)}{1+x^2}dx$, với a là số thực không âm.

Các bạn thử nghĩ cách giải quyết bài toán (*) khi không dùng các kết quả trên nhé! Một bài tập phải không nào!

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO CÓ DẠNG TƯƠNG TỰ TRÊN

Sưu tập trên http://ezine.math.vn

1.1. $\int_0^{\pi}\ln\left(a+b\cos x\right)dx,\ a,b\in\mathbb{R};a>|b|.$

1.2. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{2+\sin x}dx.$

1.3. $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin 2x}{\cos 2x + 8\cos x + 9}dx$.

1.4. $I = \int_0^{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,\ln\left(2 + x\right)dx$.

1.5. $I = \int_1^{3} \frac{\ln\left(3 + x^2\right)}{\sqrt{x\left(4 - x\right) - 2}}dx$.

Sau đây trình bày một số ví dụ minh họa phương pháp này:

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x - 4}dx.$

Lời giải:

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = \pi; x = \pi \Rightarrow t = 0.$

Vậy $I = -\int_{\pi}^{0} \frac{\left(\pi - t\right)\sin\left(\pi - t\right)}{\cos^2\left(\pi - t\right) - 4}dt = \int_0^{\pi} \frac{\left(\pi - t\right)\sin t}{\cos^2 t - 4}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t - 4}dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{\cos^2 t - 4}dt$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x - 4}dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}dx - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos^2 x - 4} = \frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{\cos x - 2}{\cos x + 2}\right|\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{4}\ln 3.$$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow dx=-dt; x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0.$

Vậy $I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=K.$

Lại có

$$I+K=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin x\cos x\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=\left(x+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{2}$$

Từ đó suy ra $I=K=\frac{\pi-1}{4}.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx.$

Lời giải:

Đặt $x=-t \Rightarrow dx=-dt; x=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}; x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}.$

Vậy $I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6(-t)+\cos^6(-t)}{6^{-t}+1}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6^t\left(\sin^6 t+\cos^6 t\right)}{6^t+1}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6^x\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)}{6^x+1}dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(6^x+1-1\right)\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)}{6^x+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx=\frac{5}{32}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 4. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Lời giải:

Ta có $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(1+x+x^2\right)-\sqrt{x^4+3x^2+1}}{\left(1+x+x^2\right)^2-\left(x^4+3x^2+1\right)}dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x+x^2}{2x\left(1+x^2\right)}dx - \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x\left(1+x^2\right)}dx$

Xét tích phân $M = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x+x^2}{2x\left(1+x^2\right)}dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{1} + \arctan t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

$N = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x\left(1+x^2\right)}dx$, đặt $x=-t \Rightarrow dx=-dt; x=1 \Rightarrow t=-1; x=-1 \Rightarrow t=1$.

Khi đó $N = \int\limits_{1}^{-1} \frac{\sqrt{(-t)^4+3(-t)^2+1}}{2(-t)\left(1+(-t)^2\right)}(-dt) = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{t^4+3t^2+1}}{2t\left(1+t^2\right)}dt = -N \Rightarrow N=0$.

Vậy $I = M - N = \frac{\pi}{4}$.

Bài 5. Cho $f(x)$ là hàm số lien tục trên đoạn $[-a;a], a>0$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

Lời giải:

Đặt $t=-x \Rightarrow dt=-dx; x=-\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{3\pi}{2}; x=0 \Rightarrow t=0$

Suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} -f(-t)dt = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Rightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \left(f(x) + f(-x)\right)dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos 2x}dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|dx = 2\left(\int_{0}^{\pi} \sin xdx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin xdx\right) = 6$$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2012} x + \cos^2 x}{1+\sin^{2012} x + \cos^{2012} x}dx$

Lời giải:

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, tương tự trên ta suy ra

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2012} x + \sin^2 x}{1+\sin^{2012} x + \cos^{2012} x}dx$$

Từ đó ta có

$$2I = I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2012} x + \cos^{2012} x + \sin^2 x + \cos^2 x}{1+\sin^{2012} x + \cos^{2012} x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\sin 2x}dx$

Lời giải:

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ khi đó $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin 2x}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Suy ra $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}dx$

Đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow dt=(\cos x+\sin x)dx$

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{4}$.

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{x\left[(3\pi\cos x+4\sin x)\sin^2 x+4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx$

Lời giải:

Đặt $t=\pi-x$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{\pi\left[(-3\pi\cos x+4\sin x)\sin^2 x+4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\left[(3\pi\cos x-4\sin x)\sin^2 x-4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx$$

Do đó $2I=\int_0^{\pi}\frac{6\pi x.\cos x.\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx+\int_0^{\pi}\frac{\pi\left[(-3\pi\cos x+4\sin x)\sin^2 x+4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(6\pi x-3\pi^2)\cos x.\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx+4\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^3 x}dx$$

Ta có

$$\int_0^{\pi}\frac{(6\pi x-3\pi^2)\cos x.\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx=2\int_0^{\pi}(2\pi x-\pi^2)d\left(\sqrt{1+\sin^3 x}\right)$$

$$=2(2\pi x-\pi^2)\sqrt{1+\sin^3 x}\Big|_0^{\pi}-4\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^3 x}dx$$

Suy ra $I=(2\pi x-\pi^2)\sqrt{1+\sin^3 x}\Big|_0^{\pi}=2\pi^2$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan x\right) dx.$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{9 - 4\cos^2 x}.$

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x \cos x}{\sin^{n-1} x + \cos^{n-1} x} dx.$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x dx}{\sin x + \cos x}.$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\left(e^x + 1\right)\cos 2x}.$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin^4 x - 1\right)\cos^2 x}{e^x + 1} dx.$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\left(\tan x + \cot x\right) dx.$

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\cos^2 x + 1} dx.$

Bài 9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}\right) dx.$

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}} dx.$

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x + \cos x\right)^3} dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 12. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

Bài 13. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin x\right)dx.$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2\left(\sin x\right)}-\tan^2\left(\cos x\right)\right)dx.$

Bài 15.Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\left(1+\sin x\right)^{1+\cos x}}{1+\cos x}dx.$

Bài 16.Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln\left(1+x\right)}{1+x^2}dx.$

Bài 17. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\left(\tan x\right)^{\alpha}}.$

Bài 18. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\left(\sqrt[2011]{\cos x}\right)+\sin^2\left(\sqrt[2011]{\sin x}\right)\right)dx$.

Bài 19. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1-x+\sqrt{x^2+1}}dx$

Bài 20. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}\tan x\right)dx$

Bài 21. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\left(2012x+\sin x\right)dx$

Bài 22. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}x^2\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 23. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\left(\cos^3 x+\cos x+\sin x\right)}{1+\cos^2 x}dx$

Bài 24. Tính tích phân $I=\int\limits_2^{4}\frac{\sqrt{\ln\left(9-x\right)}dx}{\sqrt{\ln\left(9-x\right)}+\sqrt{\ln\left(x+3\right)}}$(The Putnam Mathematica Competition 1997).

Bài 25. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{\left(x^4+x^2+1\right)\left(e^x+1\right)}dx$

Bài 26. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}dx$

Bài 27. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin^{2012}x}{\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}dx$

Bài 28. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{-x}}dx$

ĐỔI BIẾN SỐ DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC HÓA

Khi gặp một số bài toán mà biểu thức dưới dấu tích phân chứa căn thức, ta thường đổi biến số dưới dạng lượng giác như sau.

+ Nếu có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ thì đặt $x=a\sin t$ hoặc $x=a\cos t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ thì đặt $x=\frac{a}{\cos t}$ hoặc $x=\frac{a}{\sin t}$.

+ Nếu có chứa x^2+a^2 hoặc $\sqrt{x^2+a^2}$ thì đặt $x=a\tan t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{\frac{x+a}{a-x}}$ thì đặt $x=a\cos 2t$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Nếu có chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ thì đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx.$

Lời giải:

Đặt $x=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}dx.$

Lời giải:

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}.$

Vậy

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos tdt}{\left(4-4\sin^2 t\right)\sqrt{4-4\sin^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos tdt}{4\cos^2 t\sqrt{4\cos^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{4\cos^2 t}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}d(\tan t)=\frac{1}{4}\tan t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos tdt$. Khi $x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt$

$=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$

Lời giải:

Đặt $x=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx=\cos tdt$. Khi $x=0 \Rightarrow t=0; x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t\cos tdt}{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 tdt}{\cos^4 t}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 t\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 td(\tan t)=\frac{1}{3}\tan^3 t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{9\sqrt{3}}.$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx.$

Lời giải:

Đặt $x=\tan t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$

Khi $x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 t\sqrt{1+\tan^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 t}{\cos^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t}{\cos^6 t}dt$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^{2}t}{\cos^{6}t}d\left(\cos t\right)=\left(\frac{1}{5\cos^{5}t}-\frac{1}{3\cos^{3}t}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{15}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{5+x}{5-x}}dx.$

Lời giải:

Đặt $x=5\cos 2t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=-10\sin 2t dt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}; x=\frac{5}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}.$

Vậy $I=-10\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{5\left(1+\cos 2t\right)}{5\left(1-\cos 2t\right)}}\sin 2t dt=20\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^{2}t dt$

$$=10\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2t\right)dt=10\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{5\pi}{6}+\frac{5}{2}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_{0}^{1}x^{4}\sqrt{1-x^{2}}dx.$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{\sqrt{2}}x^{3}\sqrt{4-x^{2}}dx.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_{0}^{1}x^{3}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_{0}^{1}\sqrt{x^{2}+1}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 \sqrt{x^2+2x+2}dx$.

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}{x^8}dx$.

Bài 9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$.

Bài 12.Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$.

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}dx$.

BÀI TOÁN DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH VẬT TRÒN XOAY

+ Diện tích hình phẳng

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases}$

Khi đó diện tích hình phẳng là : $S = \int_a^b \left|f(x)\right|dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$

Khi đó diện tích hình phẳng là: $$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx.$$

Khi đề bài chưa cho $x = a, x = b$ thì khi đó $x = a, x = b$ được tìm ra từ nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

+ Thể tích vật thể giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases}$ khi quay quanh trục hoành (Ox).

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

+ Thể tích vật thể giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$ khi quay quanh trục hoành (Ox).

$$V_x = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx.$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = (e+1)x$ và $y = (1+e^x)x$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của hai đường là nghiệm của phương trình

$(e+1)x = (1+e^x)x \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $x = 1$.

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \int_0^1 \left| x(e^x - e) \right| dx = \int_0^1 x(e - e^x) dx = e\int_0^1 x dx - \int_0^1 xe^x dx = e\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 xd(e^x)$$

$$= \frac{e}{2} - \left(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = \frac{e}{2} - \left(e - e^x \Big|_0^1 \right) = \frac{e}{2} - 1 \text{(dvdt)}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x\ln x$ với trục hoành và đường thẳng $x = e$.

Lời giải:

Giao điểm của đường cong $y = x\ln x$ với trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.\text{(do điều kiện } x > 0).$$

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \int_1^e x\ln x dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Vậy $S = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = -\sqrt{4 - x^2}$ và $y = -\frac{1}{3}x^2.$

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của hai dường cong là nghiệm của phương trình

$-\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{4-x^2} = x^2 \Leftrightarrow 9\left(4-x^2\right) = x^4 \Leftrightarrow \left(x^2-3\right)\left(x^2+12\right) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$ vậy

diện tích cần tính là

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left|\frac{1}{3}x^2 - \sqrt{4-x^2}\right| dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^2 + \sqrt{4-x^2}\right) dx = -\frac{1}{9}x^3\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + I.+$$

Tính $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx$.

Đặt $x = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\cos tdt.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi $x=-\sqrt{3}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{3}; x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}.$

Vậy $I=2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cos tdt=4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 tdt=2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$

vậy $S=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bà 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=2x^2e^x$ và $y=-x^3e^x$.

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y^2+8x=16$ và $y^2-24x=48.$

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2\ln x$ với trục hoành và đường thẳng $x=e.$

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y^2=x^3$ và $y^2=(2-x)^3$.

Bài 5.Xác định số dương a sao cho diện tích hình phẳng giớ hạn bởi hai đường cong $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4}$ và $y=\frac{a^2-ax}{1+a^4}$ là lớn nhất.

Bài 6.Tính thể tích giới hạn bởi đường cong $y=(x-1)e^x$ và đường thẳng $x=e$ khi quay quanh trục hoành.

Bài 7.Tính thể tích giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}$ và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$ khi quay quanh trục hoành.

Bài 8.Tính thể tích giới hạn bởi hai đường cong $y=4-x^2$ và $y=x^2+2$ khi quay quanh trục hoành.

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$y=\dfrac{x}{1+\sin x}; y=0; x=0; x=\pi$.

Bài 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba đường sau:

Elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$; đường thẳng $(d): x-2\sqrt{3}y-4=0$ và trục hoành.

Bài 11. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\log_{xe^2} x$, trục Ox và đường thẳng có phương trình $x=e$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi (H) quay quanh Ox .

Bài 12. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{xe^x}}{e^x+1}$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ quay quanh trục hoành.

Bài 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\sin 2x; y=2x; x=\dfrac{\pi}{2}$

Bài 14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}}$; trục Ox và hai đường thẳng $x=0; x=1$.

Bài 15. Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi hình phẳng (H) quay quanh Ox . Biết (H) giới hạn bởi Ox, Oy và đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ và đường thẳng $x=1$.

Bài 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\dfrac{x\ln(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$ và trục hoành.

Bài 17. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\left|x^2-1\right|$ và đường thẳng thẳng $y=|x|+5$

Bài 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$ và đường thẳng $y=x+3$.

Bài 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ và $y=\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 20. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{e}{x}-\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

1.1. $I=\int_0^1 \frac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{x^2+4x+4}dx$

Đáp số: $I=\frac{e}{3}$; dùng phương pháp tích phân từng phân.

1.2. $I=\int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\ln\left(3x^4+x^2\right)-2\ln x\right)dx$

Đáp số: $I=\frac{4\ln 2+\ln 3}{3}-\frac{4}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; dùng phương pháp tích phân từng phân kết hợp đổi biến số.

1.3. $I=\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}dx$

1.4. $I=\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+1}}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+1}$ hoặc đặt $x+1=\frac{1}{t}$

1.5. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$

1.6. $I=\int_0^1 \frac{2012-x^2}{\left(2012+x^2\right)^2}dx$

1.7. $I=\int_0^2 (x+1)^2.\min\left\{3^x,4-x\right\}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.8. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+\cos x+2}{1+\cos x+\sqrt{\cos x-\cos^2 x}}dx$

Viết lại $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos x-\sqrt{\cos x-\cos^2 x}\right)dx$.

1.9. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\tan(x+\sin x)\tan(x-\sin x)\right)}{\tan(x+\sin x)}dx$

Viết lại $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(\cos 2x+\cos x.\cos(2\sin x))}{\sin 2x+\sin(2\sin x)}dx=\ln(\sin 2x+\sin(2\sin x))\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\frac{\sin 2}{1+\sin\sqrt{2}}$

1.10. $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x.\sin x}{\cos^2 x}dx$.

1.11. $I=\int_1^e\frac{\left(1-(x-1)e^x\right)\ln x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$

1.12. $I=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\cos x-x(\sin x+\cos x)+1}{x^2-x(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x}dx$

Viết $I=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\left[\left(\ln(\sin x-x)\right)'-\left(\ln(\cos x-x)\right)'\right]dx$

1.13. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\tan x(\ln(\sin x))}+\frac{\tan x}{\ln(\cos x)}\right]dx$

1.14. $I=\int_0^1\sqrt{\frac{7x+1}{(x+1)^5}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Viết lại $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{7x+1}\right)^5.(7x+1)^2}}=-\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{7x+1}\right)^5}}d\left(\frac{x+1}{7x+1}\right)$

1.15. $I=\int_1^2 \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}dx$

Viết lại $I=\int_1^2 \frac{2x^2-x-\left(2x^2-2x+1\right)}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}dx=\int_1^2 \frac{\frac{x(2x-1)}{\sqrt{2x^2-2x+1}}-\sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2}dx=\int_1^2 d\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}\right)$

1.16. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

1.17. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan x}dx$

Đặt $t=\sqrt{\tan x}$

1.18. $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Đặt $x=\tan t$

1.19. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sin x-1)\left(\frac{1}{\sin^3 x}-1\right)dx$

1.20. $I=\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}(1+\ln x)+x^2}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

1.21. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\left(x\sin x+\sqrt{x}\right)-\sin x}{x-1}dx$

1.22. $I=\int_1^e \frac{\ln^2 x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.23. $I=\int\limits_1^{\sqrt{5}}\frac{\ln x^2-\ln\left(x^2+15\right)}{\sqrt{x^2+15}\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)^2}dx$

Viết tích phân dưới dạng:

$$I=\frac{2}{15}\int\limits_1^{\sqrt{5}}\frac{15\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+15}}\right)}{\sqrt{\left(x^2+15\right)^3}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+15}}\right)^2}dx$$

Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{x^2+15}}\Rightarrow dt=\frac{15dx}{\sqrt{\left(x^2+15\right)^3}}$

1.24. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\left(e^{\sin x}-e^{2\sin x}+x^2\right)x\cos x-e^{\sin x}}{x^2-e^{2\sin x}}dx$

1.25. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\sqrt{3-\cos 2x}}dx$

1.26. $I=\int\limits_1^{e}\frac{2-x+(x-1)\ln x-\ln^2 x}{(1+x\ln x)^2}dx$

1.27. $I=\int\limits_1^{2}\frac{2\left(1+xe^x\right)+x^2e^x}{x^2\left(2+xe^x\right)^2}dx$

1.28. $I=\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\frac{(x-1)\sin(\ln x)+x\cos(\ln x)}{x}dx$

1.29. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\cos^4(\pi-x)}{\cos^4\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-1}dx$

1.30. $I=\int\limits_1^{e}\frac{2-x+(x-1)\ln x-\ln^2 x}{(1+x\ln x)^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.31. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\left(2x^2 - \cos 2x\right)}{\left(x + \sin x \cos x\right)^2} dx$

1.32. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\sin x + \cos x\right)}{\cos^2 x} dx$

1.33. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x \ln\left(\cos x\right)}{\cos x} dx$

1.34. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x\sqrt{2 + \sin 2x}}$

1.35. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x - x \sin 2x}{\left(x \sin x + \sin^2 x\right)} dx$

1.36. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{16x - 4}{\left(\sin x + \cos x\right)^2} dx$

1.37. $I = \int_{2}^{e} \frac{x^2\left(4\ln x + 1\right) + \left(2x + 1\right)\ln^2 x + 4x \ln x}{x^2 \ln x\left(x + \ln x\right)} dx$

1.38. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x - x \sin 2x - \cos^4 x}{\left(x + \sin x \cos x\right)^2} dx$

1.39. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2\sin x \cos x - 3} dx$

1.40. $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cot^2 x + \cot x}{e^x} dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.41. $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{(x+2)\left(1+2xe^{x}\right)+1}{x\left(1+xe^{x}\right)}dx$

1.42. $I=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^{2}+x+1\right)e^{x^{2}+x+1}dx$

1.43. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2}dx$

1.44. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^{2}dx$

1.45. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin 2x}{(1+\sin 2x)^{2}}dx$

1.46. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{(1+\cos x)(1+\sin x)}dx$

1.47. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sin x}{x}}+\sqrt{\frac{x}{\sin x}}.\cos x\right)dx$

1.48. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(\sin x+\cos x+2\sqrt{\sin x\cos x}\right)\sqrt{\sin x\cos x}}$

1.49. $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{2}-1}\frac{1+x^{2}}{1-x^{2}}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

1.50. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+\cos x}{1-\sin 2x}\ln(2+\sin 2x)dx$

1.51. $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-2x)e^{x}+(1+2x)e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{3}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.52. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2}{(1+x\tan x)(x-\tan x)\cos^2 x}dx$

1.53. $I = \int_0^1 \frac{(1-x+x^2)\cos\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\sin\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

1.54. $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\left\{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\right\}\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$

1.55. $I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{11+4\cos 2x+\cos 4x}{1-\cos 4x}dx$

1.56. $I = \int_0^1 \frac{\sin^2 x+\sin 2x+1}{e^{-x}+\sin^2 x+1}dx$

1.57. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x-\cos x-1}{x+e^x+\sin x}dx$

1.58. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}+3\left(\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}\right)\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$

1.59. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+\sin 2x+3\sin x+5\cos x}{\sin x+\cos x+2}dx$

1.60. $I = \int_1^2 \frac{e^x(x-2)}{x\left(x^2+e^x\right)}dx$

1.61. $I = \int_0^1 \frac{2x^2e^{x^2}-x^2e^{2x^2}-2xe^{x^2}+e^{x^2}-1}{xe^{x^2}+1}dx$

1.62. $I = \int_1^e \frac{2xe^x+x\ln x+x+1}{2x\left(e^x+\ln x+1\right)}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.63. $I=\int\limits_1^e\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(x^2-1+x\ln x\right)dx$

1.64. $I=\int\limits_1^e\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x}\right)dx$

1.65. $I=\int\limits_1^e\frac{x+1-x^2\ln x}{x^3+x^2}\cos\left[\ln\left(x+1\right)\right]dx$

1.66. $I=\int\limits_0^1\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)\sqrt[2012]{e^x-e^{-x}}\,dx$

1.67. $I=\int\limits_0^1\frac{xa^x}{\left(x\ln a+1\right)^2}dx$

1.68. $I=\int\limits_0^1\frac{a^x\left(x\ln a+1\right)}{\left(a^x+x\ln a+2\right)^2}dx$

1.69. $I=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x^{2011}}{x^{2013}+2012}}\,dx$

1.70. $I=\int\limits_1^2\frac{dx}{x\left(1+x\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x..\sqrt[n]{x}}}}\right)}$

1.71. $I=\int\limits_2^3\frac{x^{2012}-1}{\left(x-1\right)\left(x^{2013}-1\right)}dx$

1.72. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^{-x}+2\left(\sin x+\cos x\right)}dx$

1.73. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^n+6\left(\sin x-\cos x\right)}{e^x+\sin x+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}$

1.74. $I=\int\limits_1^e\frac{x^2\left(1+\left(\ln x\right)^2\right)\sqrt{1+\left(\ln x\right)^2}}{x\sqrt{1+\left(\ln x\right)^2}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.75. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{\tan \frac{x}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\tan \frac{x}{2}}} \right) dx$

1.76. $I = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4+1} - x^2}}{x^4+1} dx$

Đặt $x^2 = \tan t$

1.77. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\sin 2x}\, dx$

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam